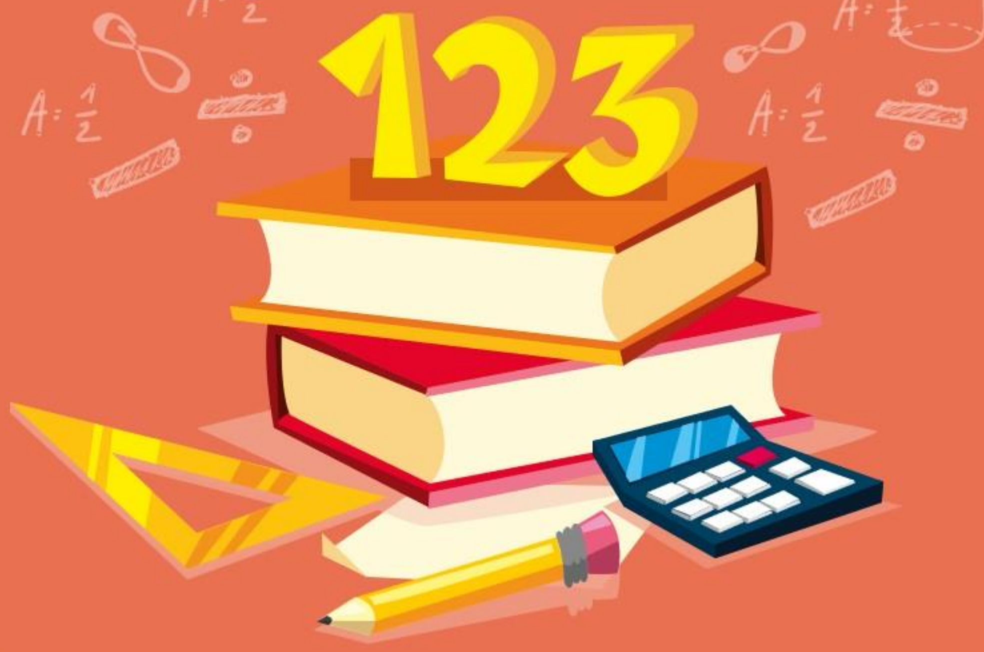
মেডিকেল এন্ড ডেন্টাল এডমিশন প্রোগ্রাম ২০২০

উচ্চতর গণিত

লেকচার : M-03

অধ্যায় ০৩ : সরলরেখা



উদ্ভাস
একাডেমিক এন্ড এডমিশন কেয়ার

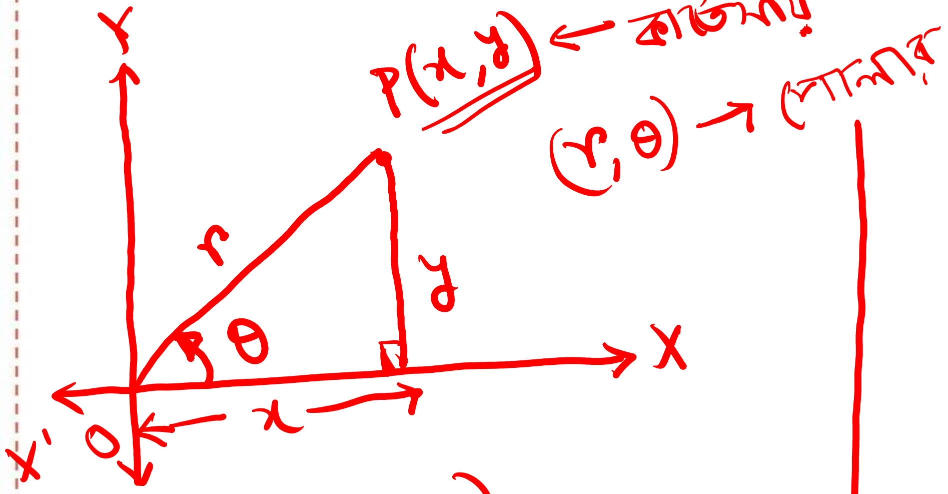
www.udvash.com

Type-01: স্থানাঙ্ক ব্যবস্থার পরিবর্তন সম্পর্কিত

(i) বিন্দুর স্থানাঙ্ককে পোলার থেকে কার্তেসীয়তে পরিবর্তনঃ

Example:

কোনো বিন্দুর পোলার স্থানাংক (3, 90°) হলে বিন্দুটির কার্তেসীয় স্থানাংক কত? [JU’14-15]



$x = r\cos\theta$
$y = r\sin\theta$
$r^2 = x^2 + y^2$

$x = r\cos\theta = 3\cos 90^\circ = 0$

$y = r\sin\theta = 3\sin 90^\circ = 3 \cdot 1 = 3$

$(0, 3)$ Ans

Type-01: স্থানাঙ্ক ব্যবস্থার পরিবর্তন সম্পর্কিত

(ii) বিন্দুর স্থানাঙ্ককে কার্তেসীয় থেকে পোলারে পরিবর্তনঃ

$\theta \rightarrow$ সবচেয়ে ছোট কোণ (+ve x অক্ষের সাথে) $\rightarrow$ মুখ্য কোণ

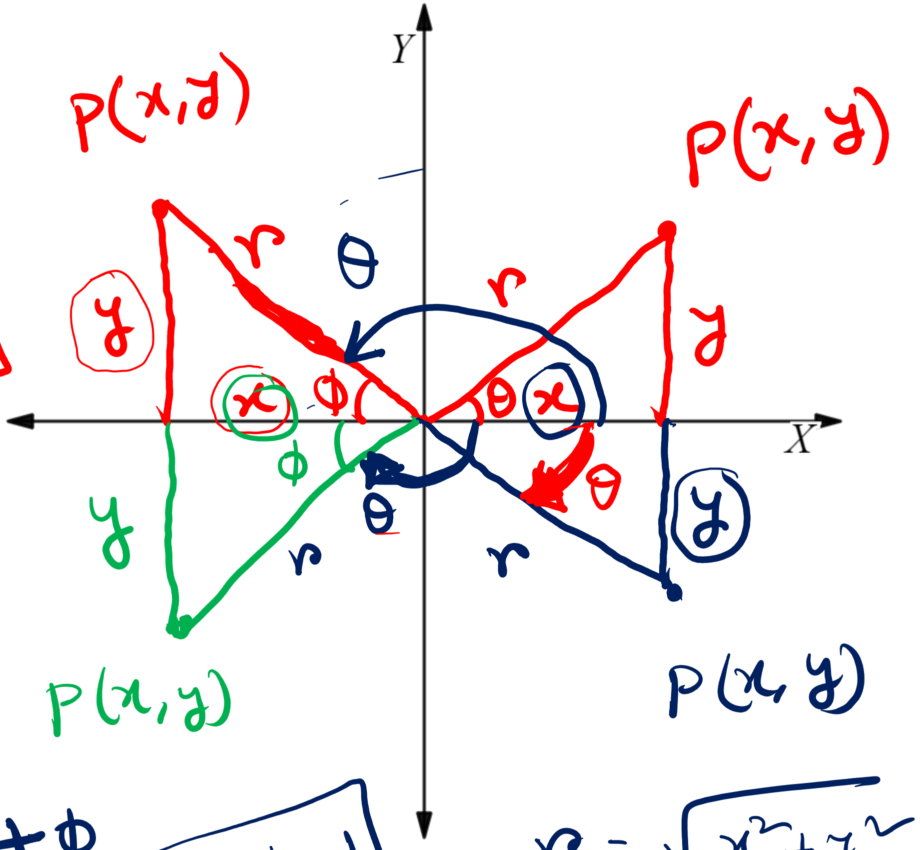
(x, y)

$r = \sqrt{x^2+y^2}$

$\phi = \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$

$\theta = \pi - \phi$

$\therefore \theta = \pi - \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$



$r = \sqrt{x^2+y^2}$

$\theta = \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$

$r = \sqrt{x^2+y^2}$

$\phi = \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$

$\theta = -(\pi - \phi)$

$\therefore \theta = -\pi + \phi$

$\theta = -\pi + \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$

$r = \sqrt{x^2+y^2}$

$\theta = -\tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$

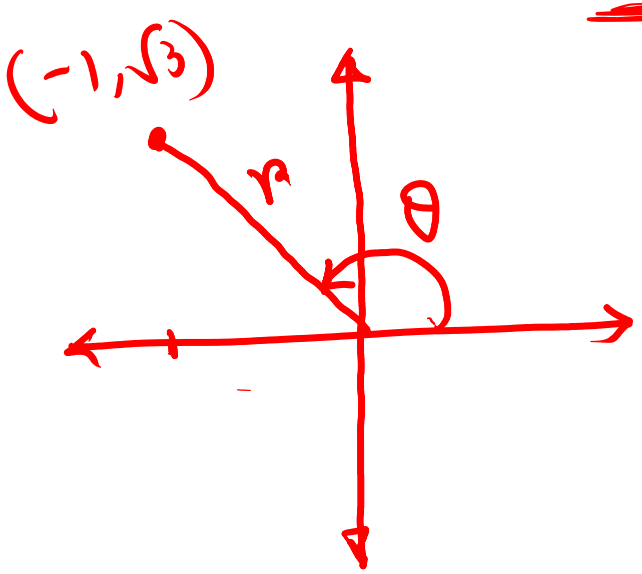
উদ্ভাস
একাডেমিক এন্ড এডমিশন কেয়ার

Type-01: স্থানাঙ্ক ব্যবস্থার পরিবর্তন সম্পর্কিত

(ii) বিন্দুর স্থানাঙ্ককে কার্তেসীয় থেকে পোলারে পরিবর্তনঃ

Example:

একটি বিন্দুর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক $(-1, \sqrt{3})$ হলে, পোলার স্থানাঙ্ক কত? [JU' 18-19, 11-12, JnU' 12-13]



$r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$

$\theta = \pi - \tan^{-1}\left|\frac{\sqrt{3}}{-1}\right|$

$= \pi - \tan^{-1}(\sqrt{3})$

$= \pi - \frac{\pi}{3}$

$= 2\pi/3$

$\left(2, \frac{2\pi}{3}\right)$ (Ans)

iii) কার্তেসীয় সমীকরণকে পোলার সমীকরণে পরিবর্তনঃ

- x এর জায়গায় $r\cos\theta$ এবং y এর জায়গায় $r\sin\theta$ বসাতে হবে।
- $x^2 + y^2$ এর জায়গায় r^2 বসাতে হবে।

$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

$x^2 + y^2 = r^2$

$(x, y) \rightarrow (r, \theta)$

Example: $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ সমীকরণটির পোলার সমীকরণ নির্ণয় কর। [CU'14-15]

$r^2 - 2a(r\cos\theta) = 0$

$\Rightarrow r^2 = 2ar\cos\theta$

$\therefore r = 2a\cos\theta$ ← Polar eqn

Type-01: স্থানাঙ্ক ব্যবস্থার পরিবর্তন সম্পর্কিত

(iv) পোলার সমীকরণকে কার্তেসীয় সমীকরণে পরিবর্তনঃ

- r^2 এর জায়গায় $x^2 + y^2$ বসাতে হবে।
- $r\cos\theta$ ও $r\sin\theta$ এর জায়গায় যথাক্রমে x ও y বসাতে হবে।

Example: পোলার সমীকরণ থেকে কার্তেসীয় সমীকরণে রূপান্তর কর: $r = a\sin\theta$

(r, θ) (x, y)

$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

$r^2 = x^2 + y^2$

$r \cdot r = a\, r\sin\theta$

$\Rightarrow r^2 = a(r\sin\theta)$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = ay$

কার্তেসীয়

Poll Question-01

❑ পোলার সমীকরণ থেকে কার্তেসীয় সমীকরণে রূপান্তর কর: $2r\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = 1$ [DU'18-19]

(a) $x^2 + y^2 = (1 + x)^2$

(b) $y^2 = 1 + 2x$

(c) a ও b

(d) None

$x = r\cos\theta$
$y = r\sin\theta$
$r = \sqrt{x^2+y^2}$

$2\sin^2\frac{\theta}{2} = 1 - \cos\theta$

$2\cos^2\frac{\theta}{2} = 1 + \cos\theta$

$\Rightarrow r\,2\sin^2\frac{\theta}{2} = 1$

$\Rightarrow r(1-\cos\theta) = 1$

$\Rightarrow r - r\cos\theta = 1$

$\Rightarrow r = r\cos\theta + 1$

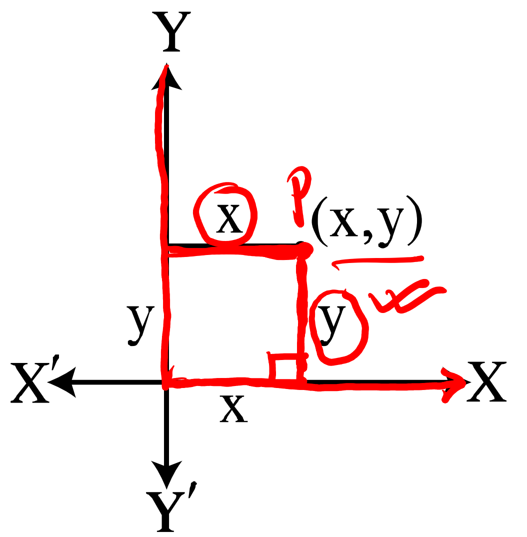
$\Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = x + 1$

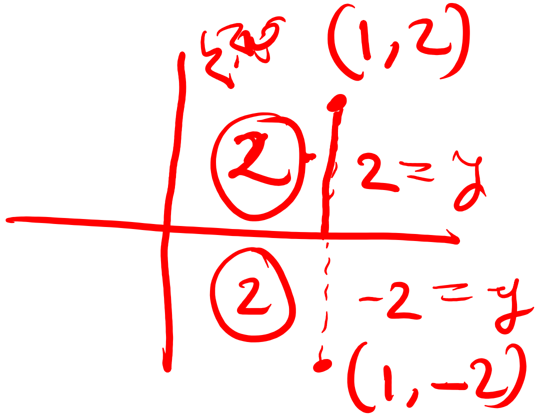
$\Rightarrow x^2 + y^2 = (1+x)^2$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = x^2 + 2x + 1$

$\therefore y^2 = 1 + 2x$

Type-02: দূরত্ব নির্ণয় সম্পর্কিত সমস্যা

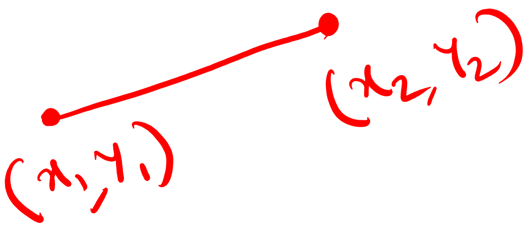




➢ (x, y) বিন্দুর i) x-অক্ষ থেকে দূরত্ব = |y|

ii) y-অক্ষ থেকে দূরত্ব = |x|

➢ (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব, $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$



Example: x-অক্ষ এবং $(-5,-7)$ বিন্দু থেকে $(4, a)$ বিন্দুটির দূরত্ব সমান হলে, a এর মান কত?
[JU’18-19, JU’11-12,RU’17-18]

x অক্ষ হতে $(4, a)$ এর দূরত্ব $= |a|$

$(-5,-7)$ " $(4, a)$ " " $= \sqrt{(-5-4)^2 + (-7-a)^2}$

$= \sqrt{81 + a^2 + 14a + 49}$

$= \sqrt{a^2 + 14a + 130}$

প্রশ্নমতে,

$|a| = \sqrt{a^2 + 14a + 130}$

$\Rightarrow a^2 = a^2 + 14a + 130$

$\Rightarrow 14a = -130$

$\therefore a = -\frac{130}{14} = -\frac{65}{7}$ (Ans)

Poll Question-02

- y অক্ষ ও (7, 2) বিন্দু থেকে (a, 5) বিন্দুটির দূরত্ব সমান হলে a এর মান কত? [RU'07-08,CU'10-11,14-15]

(a) $\frac{19}{7}$

(b) $\frac{29}{7}$

(c) $\frac{19}{9}$

(d) $\frac{29}{9}$

y অক্ষ হতে দূরত্ব = $|a|$

(7, 2) বিন্দু " " = $\sqrt{(7-a)^2+(2-5)^2}$

$= \sqrt{49-14a+a^2+9}$

$= \sqrt{a^2-14a+58}$

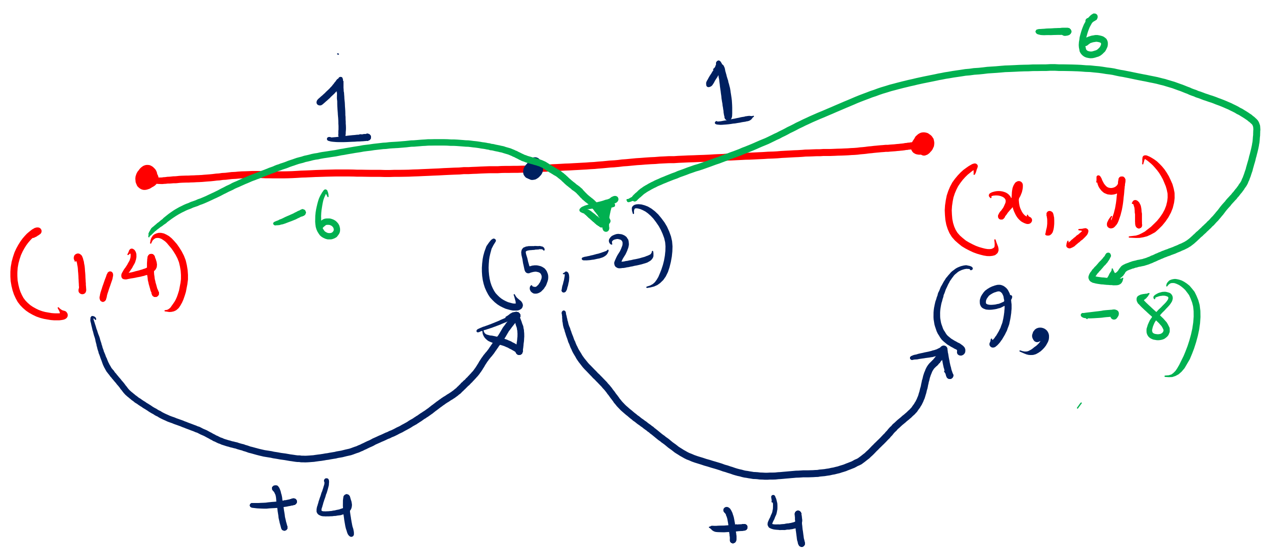
$|a| = \sqrt{a^2-14a+58}$

$\Rightarrow a^2 = a^2-14a+58$

$\Rightarrow a = \frac{58}{14} = \frac{29}{7}$ (Ans)

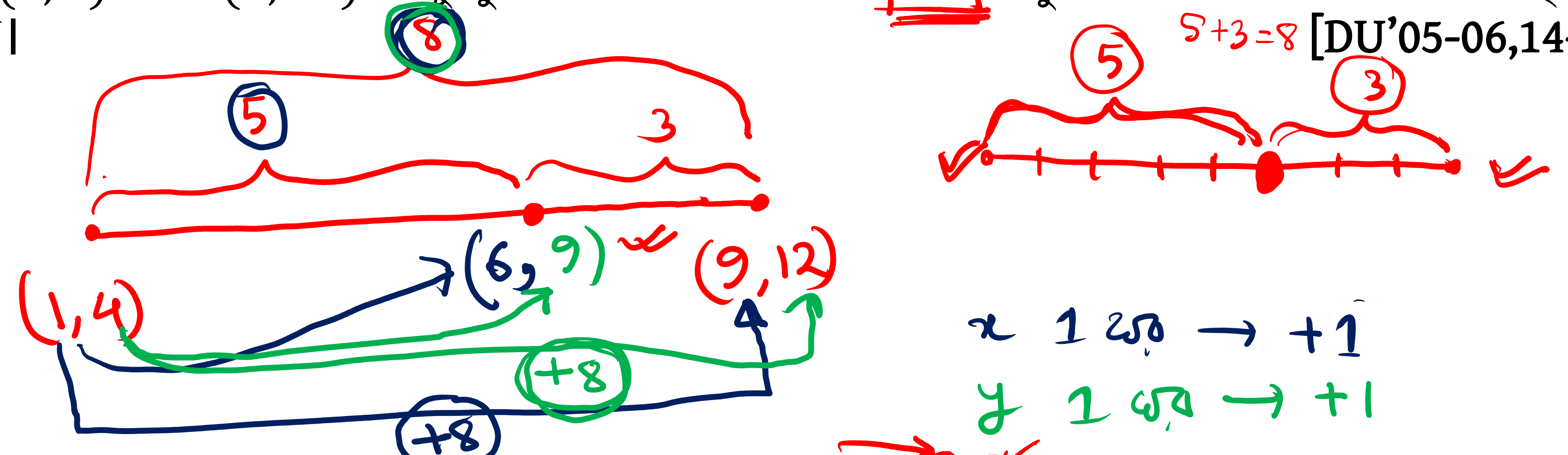
Type-03: দুইটি বিন্দুর সংযোগ রেখাকে নির্দিষ্ট অনুপাতে বিভক্তিকরণ

Example: $(1,4)$ এবং (x_1,y_1) বিন্দু দুটির মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(5,-2)$ হলে (x_1,y_1) এর মান নির্ণয় করো।

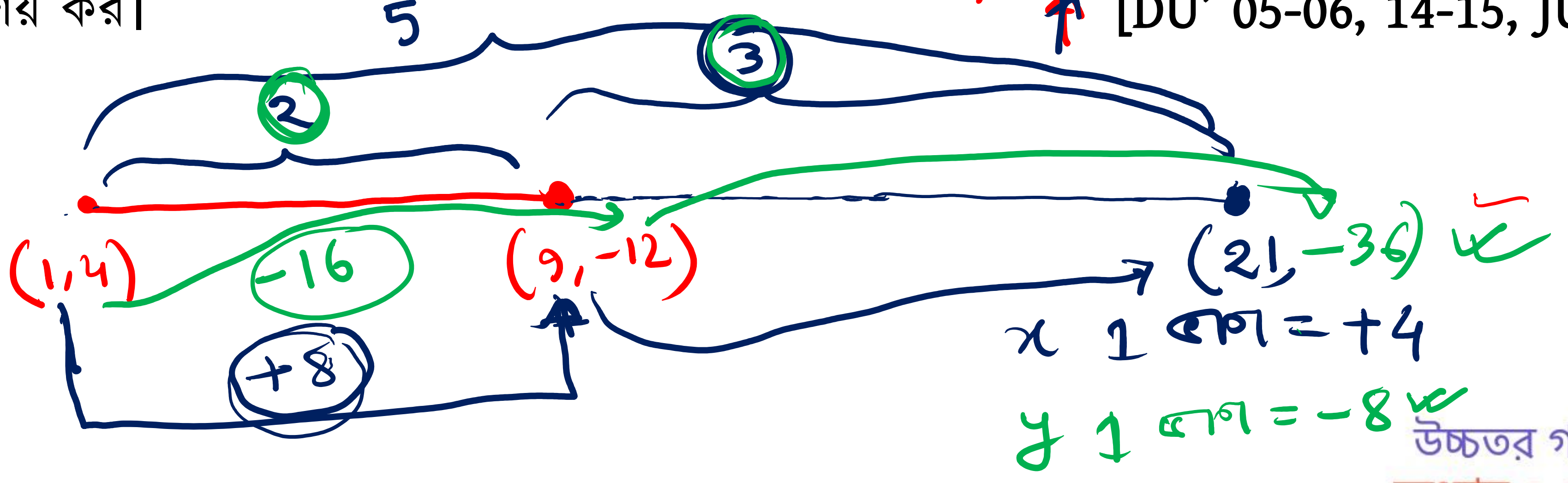


Type-03: দুইটি বিন্দুর সংযোগ রেখাকে নির্দিষ্ট অনুপাতে বিভক্তিকরণ

Example: যে বিন্দু $(1, 4)$ এবং $(9, 12)$ বিন্দু দুটির সংযোজক রেখাকে $5:3$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে তার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [DU'05-06,14-15]

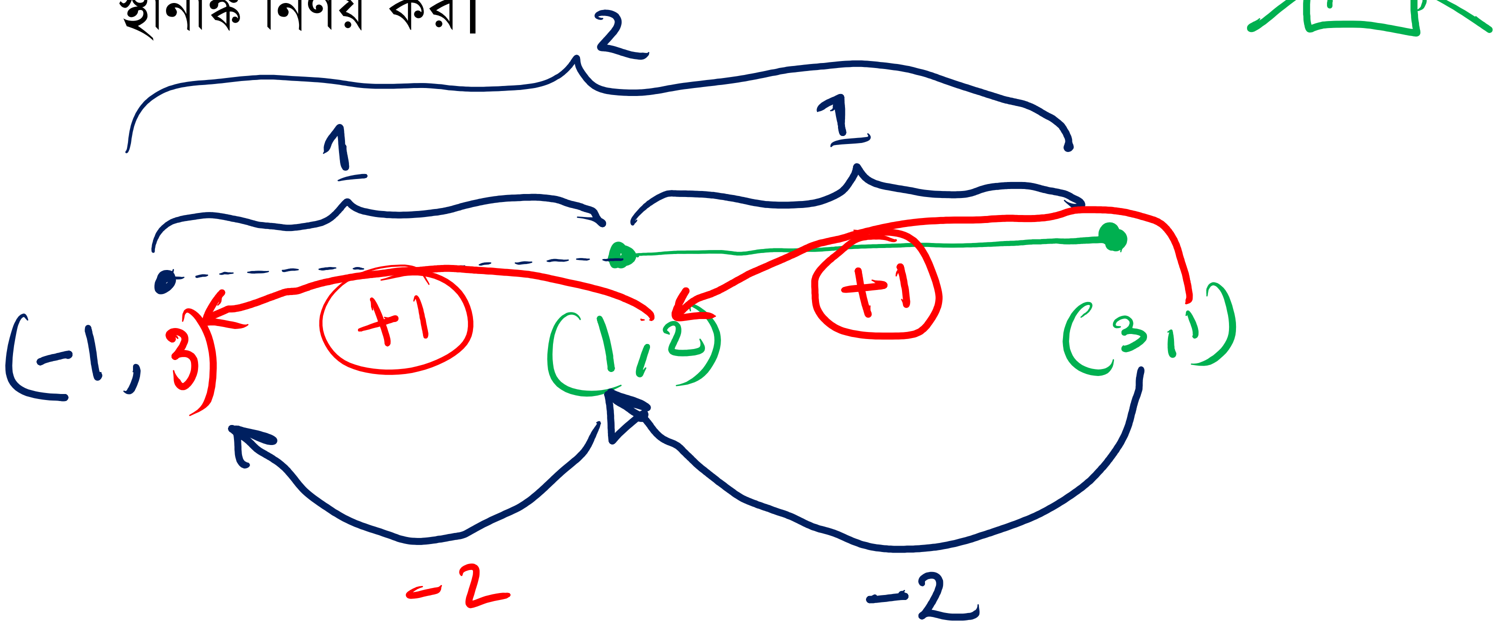


Example: যে বিন্দু $(1, 4)$ এবং $(9, -12)$ বিন্দু দুটির সংযোজক রেখাকে $5:3$ অনুপাতে বহির্বিভক্ত করে তার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [DU' 05-06, 14-15, JU' 18-19]



Type-03: দুইটি বিন্দুর সংযোগ রেখাকে নির্দিষ্ট অনুপাতে বিভক্তিকরণ

Example: যে বিন্দু (1,2) এবং (3,1) বিন্দু দুটির সংযোজক রেখাকে 1: 2 অনুপাতে বহির্বিভক্ত করে তার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।



Poll Question-03

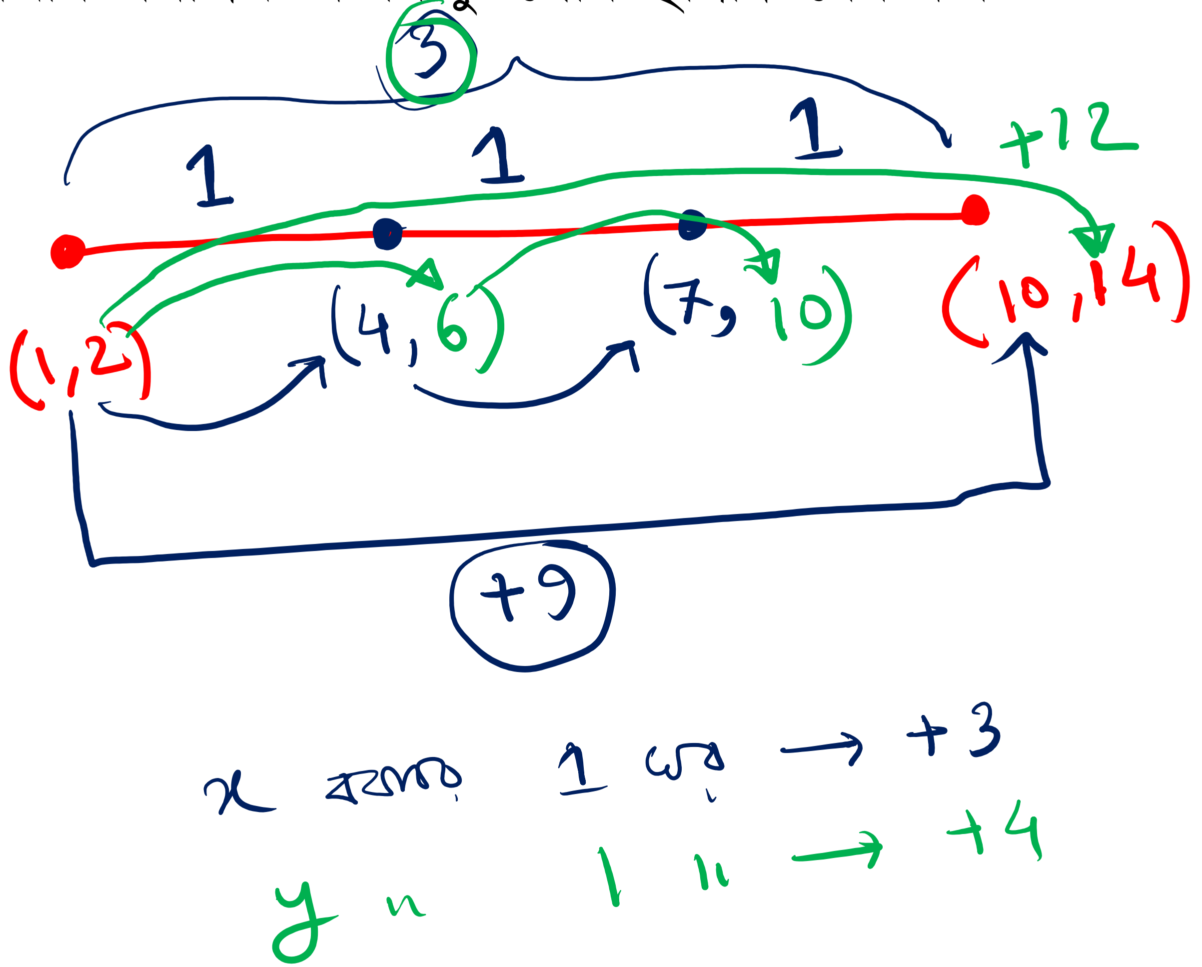
(1,2) ও (10, 14) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখার সমত্রিখন্ডক বিন্দুগুলোর স্থানাঙ্ক বের কর।

(a) (4, 6) এবং (7,10)

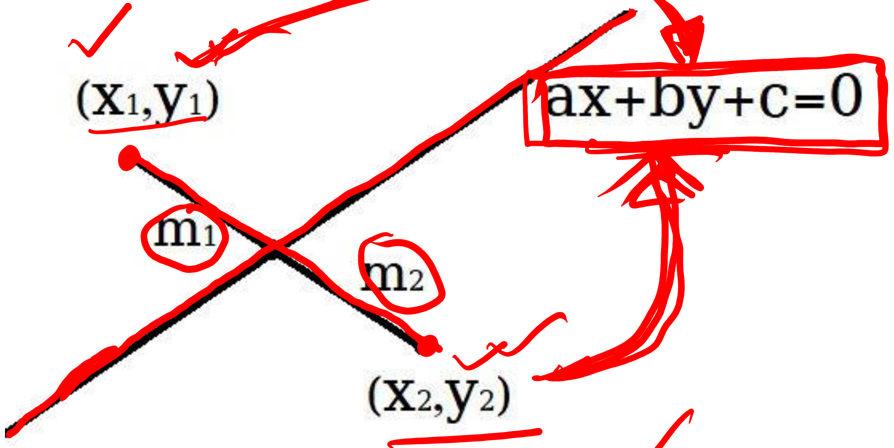
(b) (6,4) এবং (7,10)

(c) (4, 6) এবং (10,7)

(d) (6, 4) এবং (10,7)



Type-03: দুইটি বিন্দুর সংযোগ রেখাকে নির্দিষ্ট অনুপাতে বিভক্তিকরণ



$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{ax_1 + by_1 + c}{ax_2 + by_2 + c}$$

[- হলে অন্তর্বিভক্তি, + হলে বহির্বিভক্তি]

- x অক্ষ দ্বারা বিভক্তির অনুপাত $\frac{m_1}{m_2} = \frac{y_1}{y_2}$ [বিন্দুদ্বয়ের কোটির অনুপাত]
- y অক্ষ দ্বারা বিভক্তির অনুপাত $\frac{m_1}{m_2} = \frac{x_1}{x_2}$ [বিন্দুদ্বয়ের ভুজের অনুপাত]

Type-03: দুইটি বিন্দুর সংযোগ রেখাকে নির্দিষ্ট অনুপাতে বিভক্তিকরণ

Example: (3, 2) ও (5, -7) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাকে x অক্ষ ও y অক্ষ কী অনুপাতে বিভক্ত করে?

x অক্ষ বিভক্ত করে, $\frac{m_1}{m_2} = \frac{2}{-7} = -\frac{2}{7}$

2 : 7 [অন্তঃ]

y অক্ষ বিভক্ত করে, $\frac{m_1}{m_2} = \frac{3}{5}$

3 : 5 [বহিঃ]

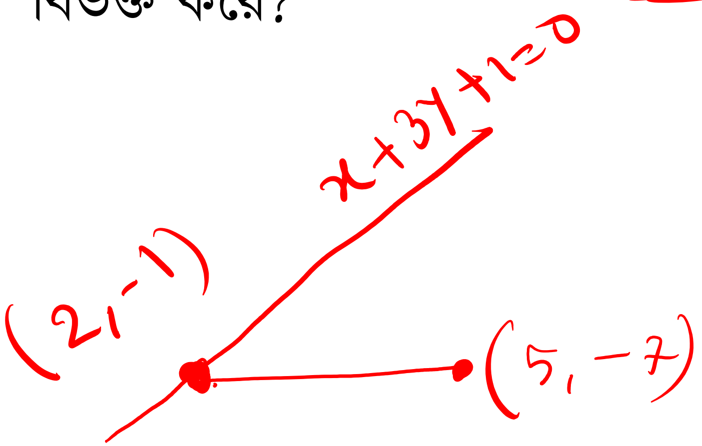
Type-03: দুইটি বিন্দুর সংযোগ রেখাকে নির্দিষ্ট অনুপাতে বিভক্তিকরণ

Example : $(3,2)$ ও $(5,-7)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাকে $2x+3y+1=0$ রেখাটি কী অনুপাতে বিভক্ত করে?

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{2\cdot3+3\cdot2+1}{2\cdot5+3(-7)+1} = \frac{13}{-10} = -\frac{13}{10}$$

13 : 10 [উত্তর]

Example : $(2,-1)$ ও $(5,-7)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাকে $x+3y+1=0$ রেখাটি কী অনুপাতে বিভক্ত করে?

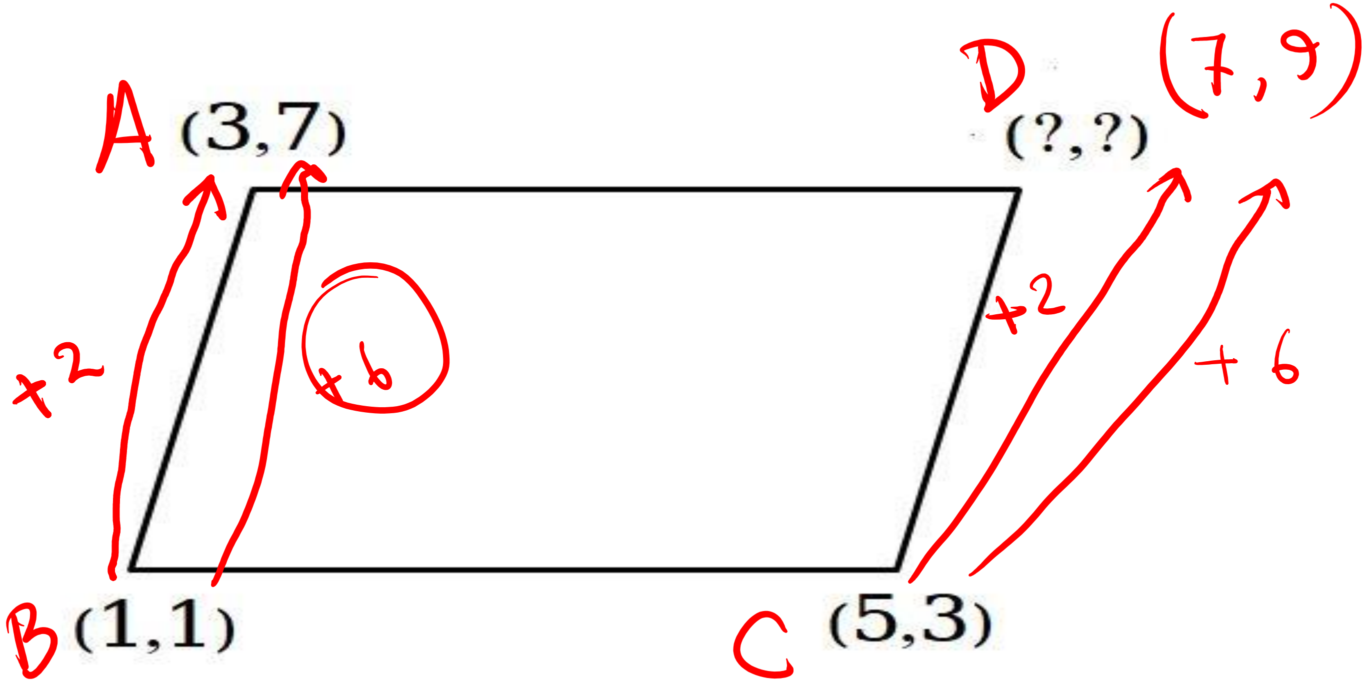


$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{2+3(-1)+1}{5+3(-7)+1} = \frac{0}{-15} = 0$$

বিভক্ত করে না।

Type-04: সামান্তরিক, আয়ত, বর্গ, রম্বস ইত্যাদির চতুর্থ শীর্ষ নির্ণয়

Example:



Poll Question-04

- একটি আয়তক্ষেত্রের শীর্ষত্রয় যথাক্রমে $(3, 2), (2, -1)$ এবং $(8, -3)$ এর চতুর্থ শীর্ষ নির্ণয় কর।

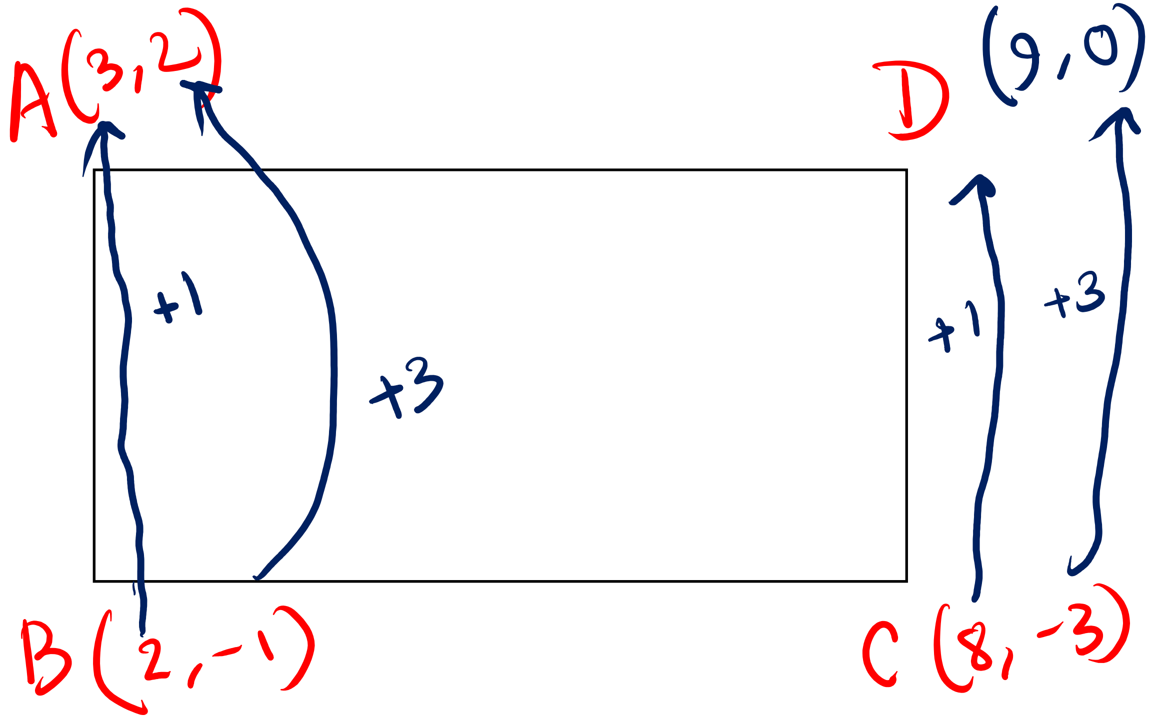
[JU’ 10-11, KU’ 06-07]

(a) (0, 9)

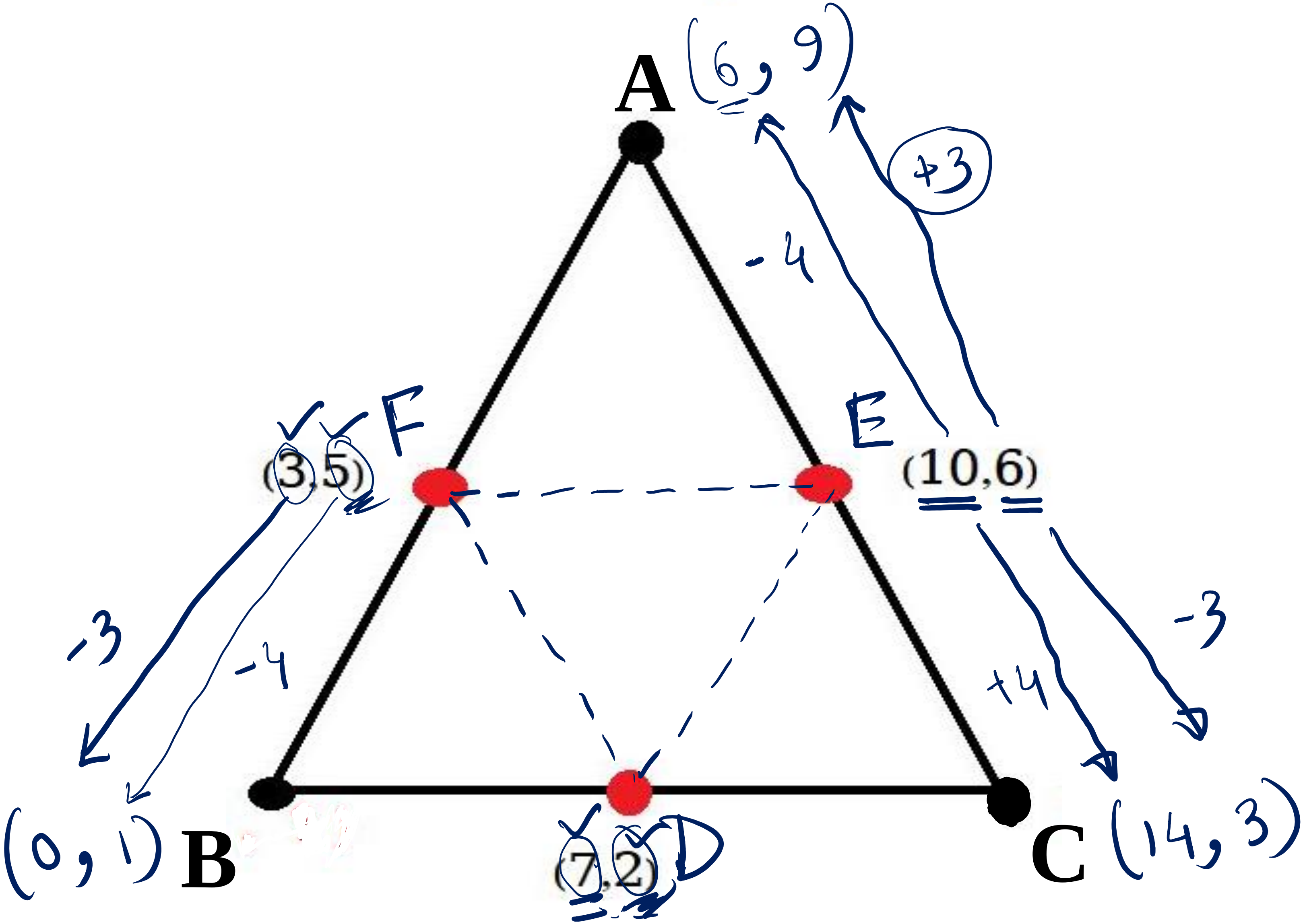
(b) (9, 0)

(c) (0, -9)

(d) (-9, 0)



ত্রিভুজের মধ্যবিন্দুর স্থানাংক থেকে শীর্ষবিন্দুর স্থানাংক নির্ণয়ঃ



Type-05: ক্ষেত্রফল নির্ণয়

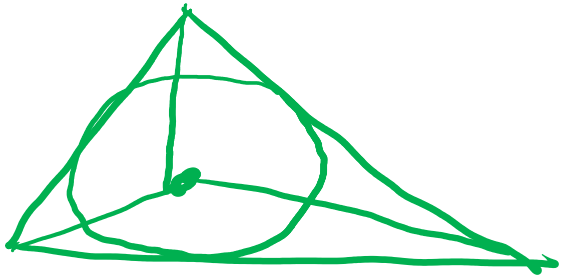
Example: কোন ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুসমূহ $(-1,-2),(2,5),(3,10)$ হলে তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।
[DU' 14-15, 01-02, 03-04, JU' 18-19, 17-18, 11-12, CU' 12-13]

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & -1 \\ -2 & 5 & 10 & -2 \end{vmatrix} = \checkmark$$

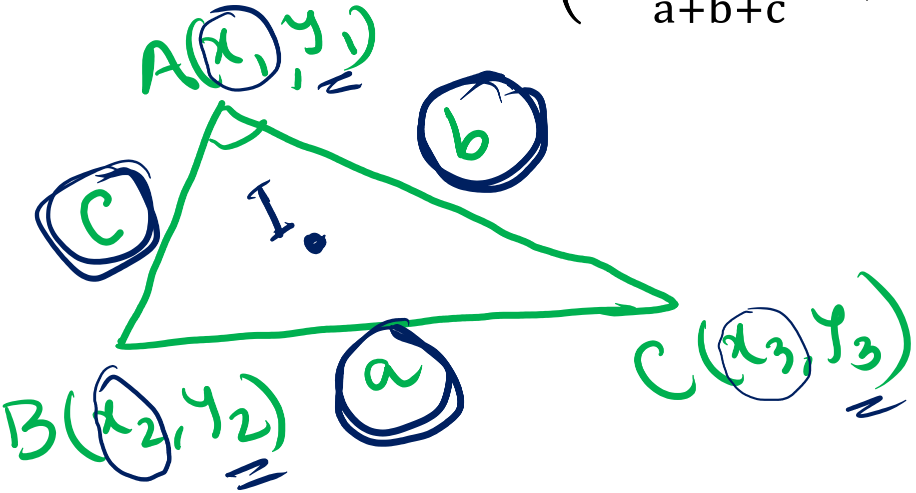
Type-06: ত্রিভুজের বিভিন্ন বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয়

$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ বিন্দু দ্বারা গঠিত

ABC ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র $\equiv \left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$



এবং অন্তঃকেন্দ্র $\equiv \left(\frac{ax_1+bx_2+cx_3}{a+b+c}, \frac{ay_1+by_2+cy_3}{a+b+c}\right)$

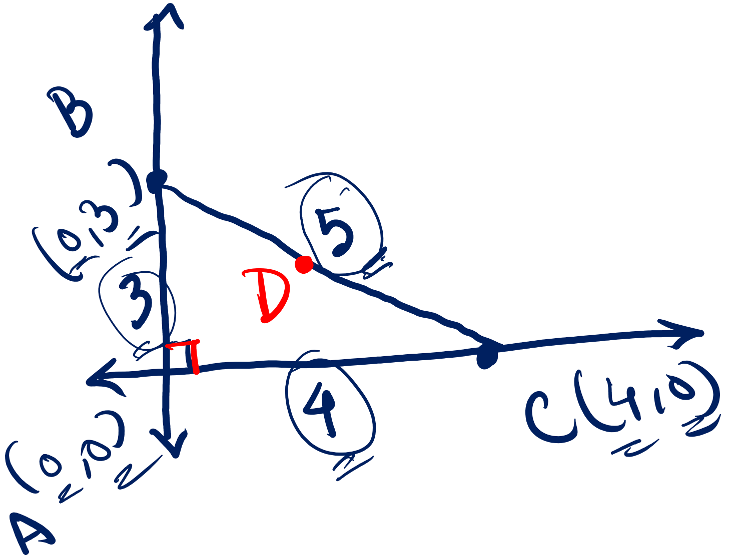


$$I\left(\frac{ax_1+bx_2+cx_3}{a+b+c}, \frac{ay_1+by_2+cy_3}{a+b+c}\right)$$

Type-06: ত্রিভুজের বিভিন্ন বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয়

Example: একটি ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় যথাক্রমে (0,0), (0,3) ও (4,0)। এর ভরকেন্দ্র, অন্তঃকেন্দ্র ও পরিকেন্দ্র নির্ণয় কর।

[BAU' 14-15]



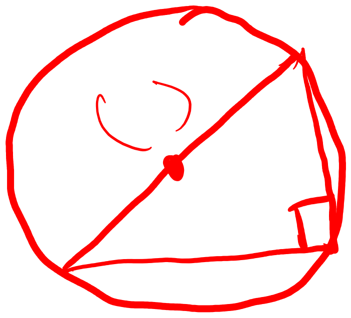
ভরকেন্দ্র $G\left(\frac{0+0+4}{3}, \frac{0+3+0}{3}\right) \equiv \left(\frac{4}{3}, 1\right)$

অন্তঃকেন্দ্র $I\left(\frac{5\times0+4\times0+3\times4}{5+4+3}, \frac{5\times0+4\times3+3\times0}{5+4+3}\right)$

$I(1,1)$

সমকোণী ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র → অতিভুজের মধ্যবিন্দু

পরিকেন্দ্র, $D\left(\frac{0+4}{2}, \frac{3+0}{2}\right) \equiv \left(2, \frac{3}{2}\right)$



Type-7: সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয়

Example: $(2t + 1, 3t - 1)$ বিন্দুর সঞ্চারপথ কী হবে যেখানে t পরিবর্তনশীল। (t → প্যারামিটার)

প্যারামিটার রূপ:

$x = 2t + 1$ —— (1)

$y = 3t - 1$ —— (2)

$(1) \times 3 \Rightarrow 3x = 6t + 3$

$(2) \times 2 \Rightarrow 2y = 6t - 2$

$3x - 2y = 5$ → সরলরেখা

Example: $(a\cos\theta, \ b\sin\theta)$ বিন্দুর সঞ্চারপথ কী?

$x = a\cos\theta \rightarrow \frac{x}{a} = \cos\theta$

$y = b\sin\theta \rightarrow \frac{y}{b} = \sin\theta$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\Rightarrow \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$

$\therefore \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ← উপবৃত্ত

উদ্ভাস একাডেমিক এন্ড এডমিশন কেয়ার

Poll Question-05

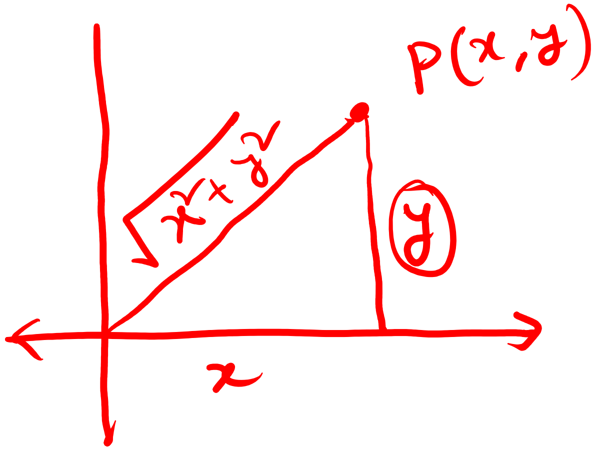
- x অক্ষ থেকে একটি সেটের বিন্দুসমূহের দূরত্ব সর্বদাই মূলবিন্দু থেকে এর দূরত্বের অর্ধেক। উক্ত সেট দ্বারা সৃষ্ট সঞ্চারপথের সমীকরণ কি? [JU' 09-10]

(a) $x^2 + y^2 = 4y^2$

(b) $x^2 = 3y^2$

(c) a ও b

(d) none



x অক্ষ হতে দূরত্ব $= \frac{1}{2} \times$ মূলবিন্দু থেকে দূরত্বের অর্ধেক

$\Rightarrow |y| = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$

$\Rightarrow y^2 = \frac{1}{4}(x^2+y^2)$

$\Rightarrow 4y^2 = x^2 + y^2$

$\therefore x^2 = 3y^2$

Type-8: ঢাল নির্ণয় সংক্রান্ত

- (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) এর সংযোজক রেখাংশের ঢাল, $m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{\text{কোটিদ্বয়ের অন্তর}}{\text{ভূজদ্বয়ের অন্তর}}$
- রেখাংশ x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে θ কোণ তৈরি করলে, $m = \tan\theta$ হবে।
- $ax + by + c = 0$ কোন সরলরেখার সমীকরণ হলে তার ঢাল, $m = -\frac{a}{b} = -\frac{x \text{ এর সহগ}}{y \text{ এর সহগ}}$

Example: $x - y + 4 = 0$ সরলরেখাটি y অক্ষের সাথে কত ডিগ্রি কোণ উৎপন্ন করে? [DU' 18-19]

45°

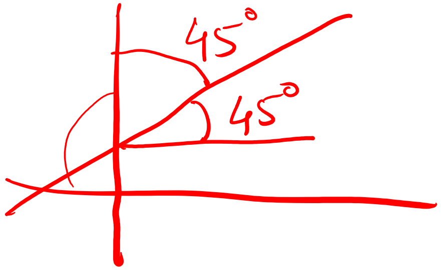
$y = x + 4$

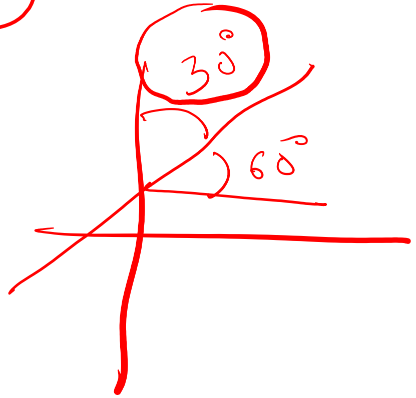
$y = mx + c$

$m = 1$

$m = \tan\theta = 1$

$\Rightarrow \theta = 45^\circ$





$m = \sqrt{3} = \tan\theta$

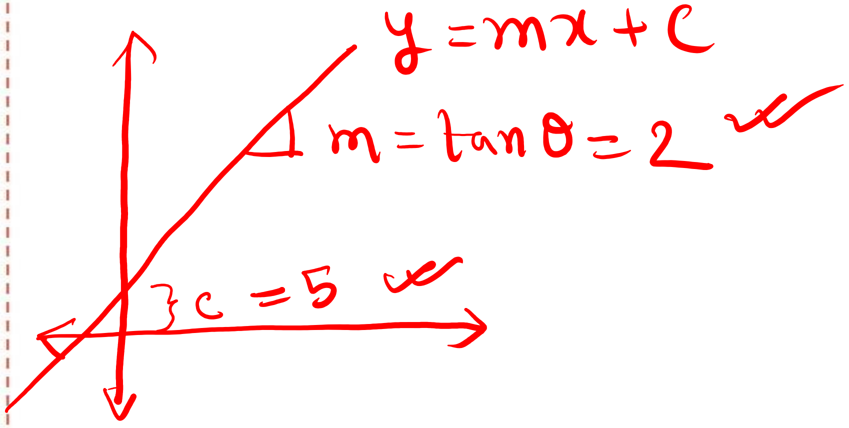
$\theta = \pi/\sqrt{3} = 60^\circ$

Type-9: বিভিন্ন শর্তের সাপেক্ষে সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয়

Case-01: ঢাল ও y অক্ষ থেকে খন্ডিতাংশ দেওয়া থাকলে

- কোনো রেখার ঢাল m এবং y অক্ষ থেকে কর্তিত অংশ c হলে রেখার সমীকরণ $\Rightarrow$ $\boxed{y = mx + c}$

Example: একটি সরলরেখার ঢাল 2 ও তা y অক্ষের ধনাত্মক দিক থেকে 5 একক অংশ খন্ডিত করে। রেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর।



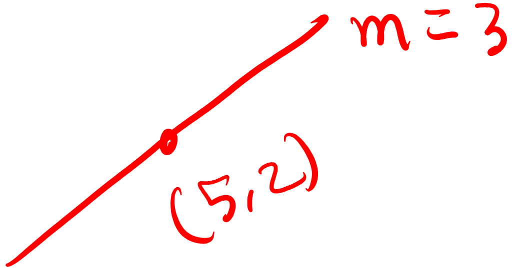
$\boxed{y = 2x + 5}$

Type-9: বিভিন্ন শর্তের সাপেক্ষে সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয়

Case-02: বিন্দু ও ঢাল দেয়া থাকলে

➢ একটি সরলরেখার ঢাল m এবং রেখাটি (x_1, y_1) বিন্দুগামী হলে, রেখার সমীকরণ $\Rightarrow$ $(y - y_1) = m(x - x_1)$

Example: $(5,\ 2)$ বিন্দুগামী এবং 3 ঢাল বিশিষ্ট রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

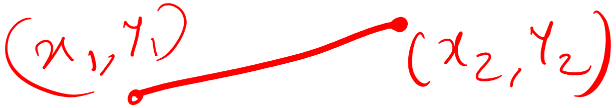


$y - 2 = 3(x - 5)$

Ans

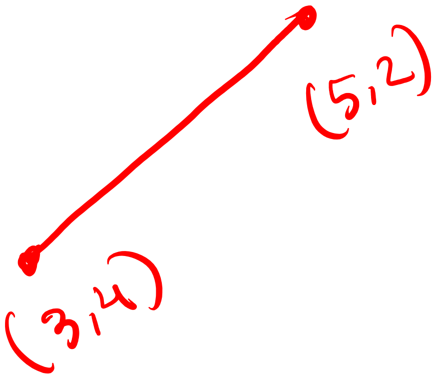
Type-9: বিভিন্ন শর্তের সাপেক্ষে সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয়

Case-03: দুটি নির্দিষ্ট বিন্দুগামী হলে



➢ একটি সরলরেখা (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) বিন্দুগামী হলে রেখার সমীকরণ $\Rightarrow \frac{y-y_1}{y_1-y_2} = \frac{x-x_1}{x_1-x_2}$

Example: (3, 4) ও (5, 2) বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।



$$\frac{y-4}{4-2} = \frac{x-3}{3-5}$$ → সমী

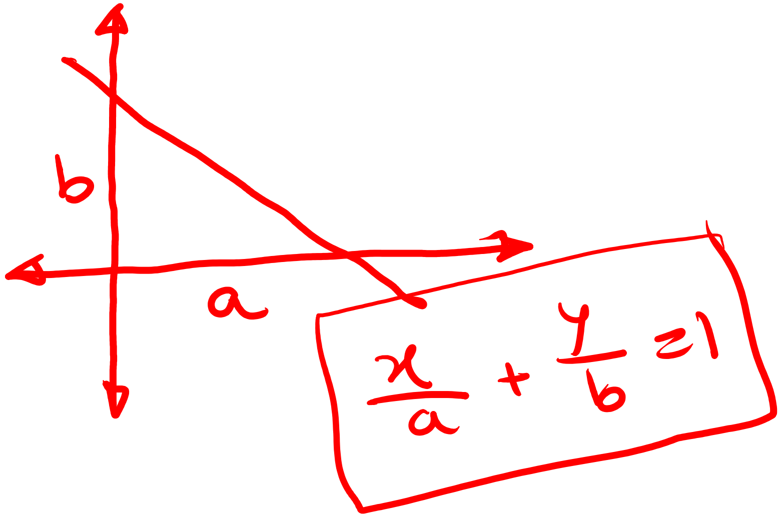
ঢাল $= \frac{4-2}{3-5} = \frac{2}{-2} = -1$

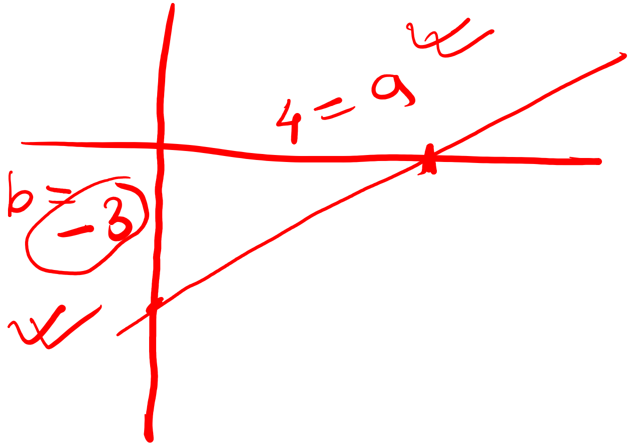
Type-9: বিভিন্ন শর্তের সাপেক্ষে সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয়

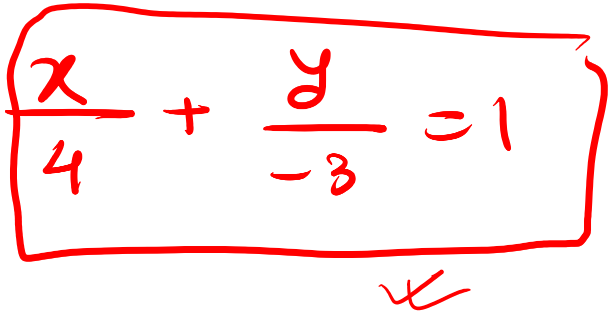
Case-04: উভয় অক্ষ থেকে খন্ডিতাংশ দেওয়া থাকলে

➢ একটি সরলরেখার x অক্ষের কর্তিতাংশ a এবং y অক্ষের কর্তিতাংশ b হলে রেখার সমীকরণ ⇒ $\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1}$

Example: একটি সরলরেখার x অক্ষের **ধনাত্মক** দিক থেকে 4 একক এবং y অক্ষের **ঋণাত্মক** দিক থেকে 3 একক অংশ খন্ডিত করে। রেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর।





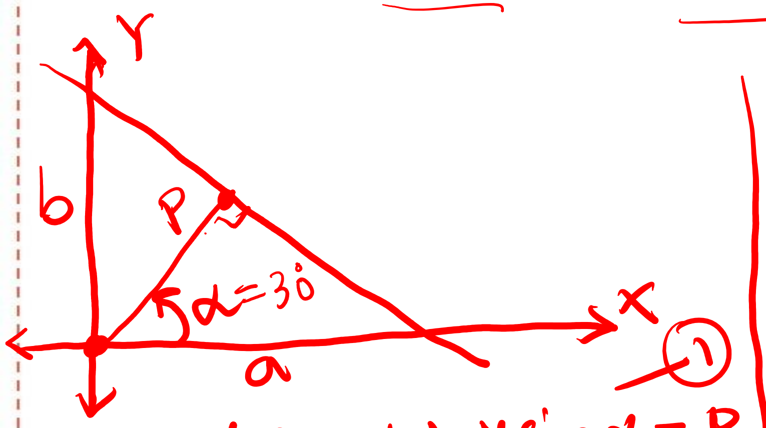


Type-9: বিভিন্ন শর্তের সাপেক্ষে সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয়

Case-05: মূলবিন্দু থেকে লম্বের দৈর্ঘ্য এবং উক্ত লম্ব x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে উৎপন্ন কোণ দেওয়া থাকলে

➢ মূলবিন্দু থেকে যে রেখার উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য p এবং উক্ত লম্ব x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে α কোণ তৈরি করলে এরূপ রেখার সমীকরণ ⇒ $\boxed{x\cos\alpha + y\sin\alpha = p}$

Example: একটি সরলরেখা অক্ষদ্বয়ের সাথে $\frac{50}{\sqrt{3}}$ বর্গ একক ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ গঠন করে এবং মূলবিন্দু হতে রেখাটির উপর অঙ্কিত লম্ব x অক্ষের সাথে 30° কোণ উৎপন্ন করে। রেখাটির সমীকরণ কোনটি? [RU'18-19]



$x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ ... (1)

$\Rightarrow \frac{x}{\frac{p}{\cos\alpha}} + \frac{y}{\frac{p}{\sin\alpha}} = 1$ → a, b

$\frac{1}{2}ab = \frac{50}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{p}{\cos\alpha} \times \frac{p}{\sin\alpha} = \frac{50}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \frac{p^2}{\sin 2\alpha} = \frac{50}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow p^2 = \frac{50}{\sqrt{3}} \times \sin 2\alpha$

$\Rightarrow p^2 = \frac{50}{\sqrt{3}} \sin 60° = \frac{50}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow p^2 = 25$

$\therefore \boxed{p = 5}$

(1) → α, p → $\boxed{x\cos 30° + y\sin 30° = 5}$ (Ans)

উদ্ভাস
একাডেমিক এন্ড এডমিশন কেয়ার

Type-10: সমান্তরাল সরল রেখার সমীকরণ

Example: $3x + 4y + 5 = 0$ রেখার সমান্তরাল রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা $(1, 2)$ বিন্দুগামী। [JU' 18-19, RU' 09-10]

২টি সরল রেখা সমান্তরাল হওয়ার শর্ত, $m_1 = m_2$

$ax + by + c = 0$ এর সমান্তরাল (x_1, y_1) বিন্দুগামী রেখার সমী,

$$ax + by = ax_1 + by_1$$

$$3x + 4y = 3\cdot1 + 4\cdot2 = 11$$

Poll Question-06

❐ α এর কোন মানের জন্য $(\alpha - 1)x + (\alpha + 1)y - 7 = 0$ রেখাটি $3x + 5y + 4 = 0$ রেখার সমান্তরাল হবে? [RU'08-09]

(a) 4

(b) −4

(c) 0

(d) 7

$m_1 = -\frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}$ $m_2 = -\frac{3}{5}$

So $m_1 = m_2$

$\Rightarrow -\frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} = -\frac{3}{5}$

$\Rightarrow 5\alpha - 5 = 3\alpha + 3$

$\Rightarrow 2\alpha = 8$

$\therefore \alpha = 4$

Type-11: লম্ব রেখার সমীকরণ

Example: $3x + 4y + 5 = 0$ রেখার উপর লম্ব রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা $(3, 4)$ বিন্দুগামী। [RU' 08-09]

২টি সরলরেখা লম্ব হলে $m_1 m_2 = -1$

$ax + by + c = 0$ এর উপর লম্ব এবং (x_1, y_1) বিন্দুগামী

$$bx - ay = bx_1 - ay_1$$

$$4x - 3y = 4.3 - 3.4 = 0$$

Poll Question-07

❑ $2x + 3y = 5$ এবং $3x + ky = 0$ রেখাদ্বয় লম্ব হলে k এর মান কত? [RU' 11-12, 09-10, 08-09]

(a) 2

(b) 3

(c) −2

(d) −3

$m_1 = -\frac{2}{3}$ $m_2 = -\frac{3}{k}$

So, $m_1 m_2 = -1$

$\Rightarrow \left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{3}{k}\right) = -1$

$\Rightarrow \frac{2}{k} = -1$

$\therefore k = -2$

Type-12: দুটি রেখার মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয়

- দুটি সরলরেখার ঢাল m_1 ও m_2 হলে তাদের মধ্যবর্তী কোণ যদি θ হয় তবে, $\tan\theta = \pm\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$
- $\tan\theta$ এর $+ve$ মান নিয়ে রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী সূক্ষ্মকোণ পাওয়া যায়।
- $\tan\theta$ এর $-ve$ মান নিয়ে রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী স্থূলকোণ পাওয়া যায়।

Example: $2x + 3y - 1 = 0$ ও $x - 2y + 3 = 0$ রেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত সূক্ষ্মকোণ নির্ণয় কর।

[DU' 18-19, 08-09, JU' 18-19]

$m_1 = -\frac{2}{3}$ $m_2 = \frac{1}{2}$

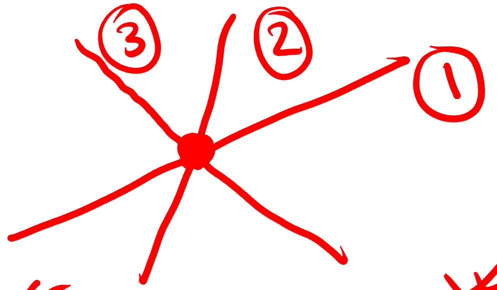
$\tan\theta = \pm\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2} = \pm\frac{-\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}{1+\left(-\frac{2}{3}\right)\times\frac{1}{2}} = \pm\frac{\frac{-4-3}{6}}{\frac{6-2}{6}} = \pm\left(-\frac{7}{4}\right) = \pm\frac{7}{4}$

$\tan\theta = \pm\frac{7}{4}$ | $\tan\theta = \frac{7}{4} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{7}{4}\right)$

Type-13: তিনটি রেখার সমবিন্দু হওয়া সম্পর্কিত

➢ $a_1x + b_1y + c_1 = 0$; $a_2x + b_2y + c_2 = 0$; $a_3x + b_3y + c_3 = 0$ রেখাত্রয় সমবিন্দু হবে যদি,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \text{ হয়।}$$

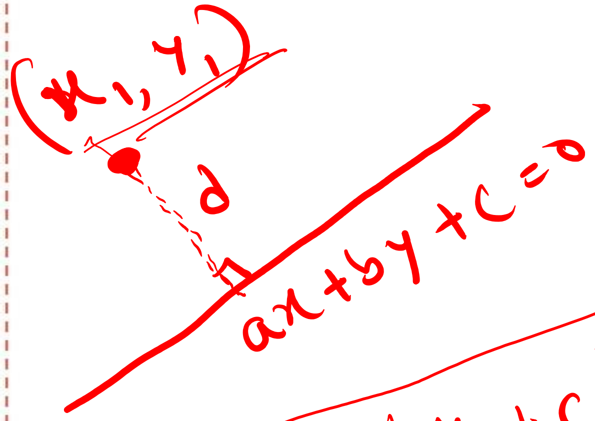


Example: $2x + by + 4 = 0, 4x - y - 2b = 0$ এবং $3x + y - 1 = 0$ রেখা তিনটি সমবিন্দু হলে b এর মান নির্ণয় কর। [DU' 14-15]

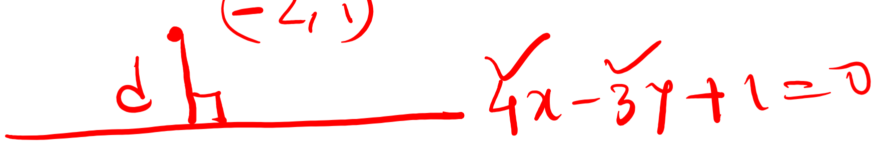
$$\begin{vmatrix} 2 & b & 4 \\ 4 & -1 & -2b \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow b = ?, ?$$

➢ (x_1, y_1) **বিন্দু হতে** $ax + by + c = 0$ **সরল**রেখার উপর লম্ব দূরত্ব, $d = \left|\frac{ax_1+by_1+c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$

Example: $(-2, 1)$ বিন্দু হতে $4x - 3y + 1 = 0$ সরলরেখার উপর অংকিত লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। **[JU' 10-11]**



$$d = \frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

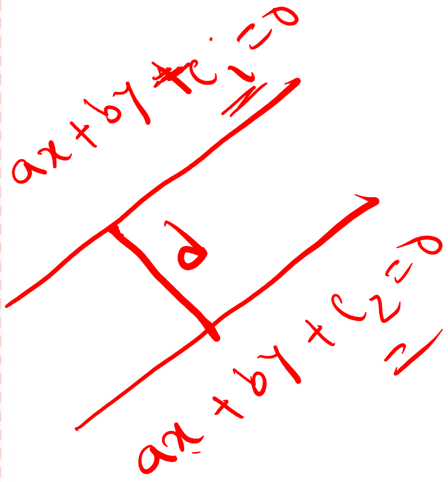


$$d = \frac{|4(-2) - 3.1 + 1|}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{10}{5} = 2$$

Type-15: সমান্তরাল রেখার মধ্যবর্তী দূরত্ব

➢ দুটি সমান্তরাল রেখা $ax + by + c_1 = 0$ এবং $ax + by + c_2 = 0$ এর মধ্যবর্তী দূরত্ব, $d = \left|\frac{c_1 - c_2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$

Example: $5x + 12y - 2 = 0$ এবং $10x + 24y - 30 = 0$ সমান্তরাল সরলরেখা দুটির মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় কর।



$5x + 12y - 2 = 0$ (c_1)

$10x + 24y - 30 = 0$

$\div 2$

$5x + 12y - 15 = 0$ (c_2)

$d = \frac{|-2-(-15)|}{\sqrt{5^2+12^2}}$

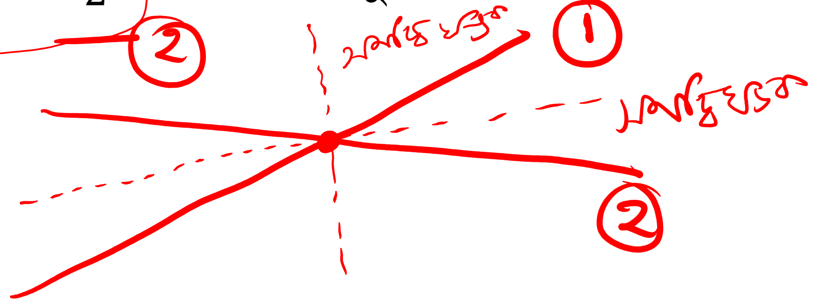
$= \frac{13}{13}$

$= 1$

Type-16: কোণের সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ

➢ $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ এবং $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ রেখা দুটির অন্তর্গত কোণদ্বয়ের সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ

$$\Rightarrow \frac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}} = \pm \frac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$$



$a_1a_2 + b_1b_2 \rightarrow$ এর চিহ্ন মিলে $\rightarrow$ স্থূলকোণের সমদ্বিখন্ডক

" বিপরীত হলে " $\rightarrow$ সূক্ষ্ম " "

$c_1c_2 \rightarrow$ এর চিহ্ন $\rightarrow$ মূলবিন্দুধারী কোণের সমদ্বিখন্ডক

Type-16: কোণের সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ

Example: $y = 2x + 1$ ও $2y - x = 4$ রেখা দুইটির অন্তবর্তী কোণের সমদ্বিখণ্ডক নির্ণয় কর। এদের মধ্যে কোনটি সূক্ষ্ম ও স্থূলকোণের সমদ্বিখন্ডক এবং কোনটি মূলবিন্দুধারী কোণের সমদ্বিখন্ডক?

$2x - y + 1 = 0$ $\qquad$ $x - 2y + 4 = 0$

$a_1a_2 + b_1b_2 \rightarrow (+)$

$2\times1 + (-1)\times(-2) = 4 \rightarrow (+)$

$c_1c_2 = 1\times4 = 4 \rightarrow (+)$

স্থূল ঃ মূলবিন্দুধারী

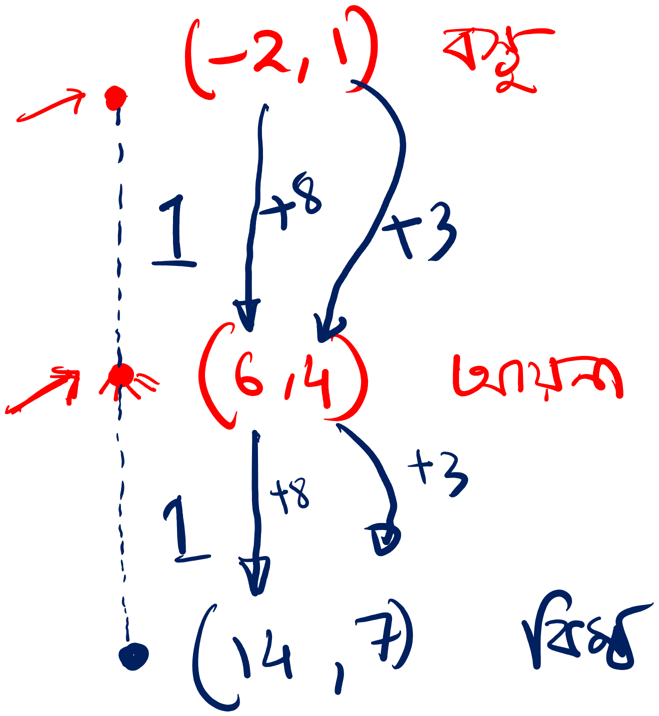
$$\frac{2x - y + 1}{\sqrt{2^2+1^2}} = (+)\frac{x - 2y + 4}{\sqrt{1^2+2^2}}$$

সূক্ষ্ম ঃ

$$\frac{2x - y + 1}{\sqrt{2^2+1^2}} = -\frac{x - 2y + 4}{\sqrt{1^2+2^2}}$$

Case 1: বিন্দুর সাপেক্ষে বিন্দুর প্রতিবিম্ব

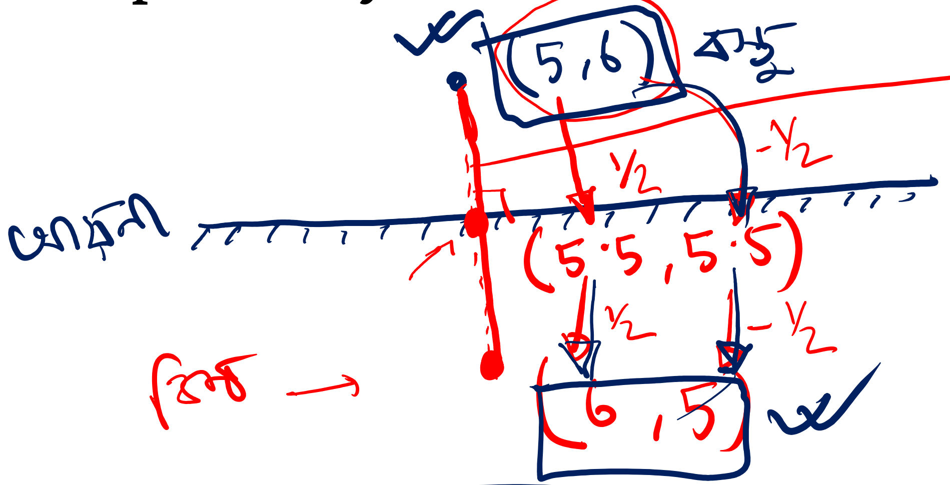
Example: (6, 4) বিন্দুর সাপেক্ষে (-2, 1) বিন্দুর প্রতিবিম্ব বের কর ।



Type-17: প্রতিবিম্ব নির্ণয়

Case 2: রেখার সাপেক্ষে বিন্দুর প্রতিবিম্ব

Example: $x - y = 0$ রেখার সাপেক্ষে $(5, 6)$ বিন্দুর প্রতিবিম্ব বের কর।



$x + y = 5 + 6 = 11$

$x + y = 11$

$x - y = 0$

(+) $2x = 11$

$\therefore x = \frac{11}{2} = 5.5$

$y = x = \frac{11}{2} = 5.5$

$y = x$ রেখার সাপেক্ষে (x_1, y_1) এর বিম্ব (y_1, x_1)

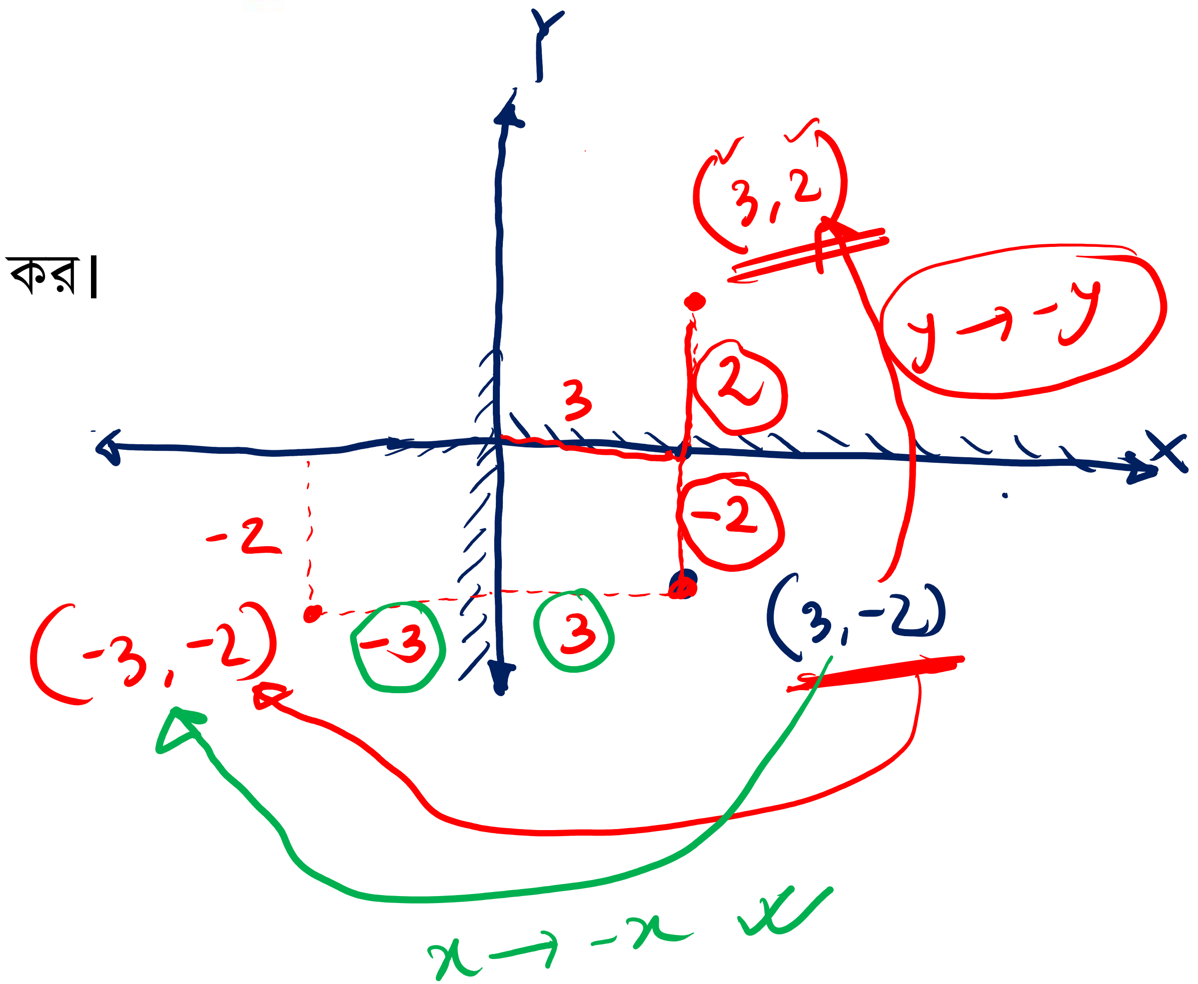
$y = x$ এর সাপেক্ষে $(3, 4) \xrightarrow{\text{বিম্ব}} (4, 3)$

Case 3: অক্ষের সাপেক্ষে বিন্দুর প্রতিবিম্ব

Example: (3, −2) বিন্দুর প্রতিবিম্ব নির্ণয় কর।

(a) x অক্ষের সাপেক্ষে

(b) y অক্ষের সাপেক্ষে



Type-17: প্রতিবিম্ব নির্ণয়

Case 3: অক্ষদ্বয়ের সাপেক্ষে এবং $y = x$ রেখার সাপেক্ষে প্রতিবিম্ব

y অক্ষের সাপেক্ষে, x অক্ষের সাপেক্ষে এবং $y = x$ রেখার সাপেক্ষে $x^2 + y^2 + 6x + 4y + 1 = 0$ বৃত্তের প্রতিবিম্ব বের কর।

y অক্ষের সা: $(x \rightarrow -x)$: $(-x)^2 + y^2 + 6(-x) + 4y + 1 = 0$

x " " $(y \rightarrow -y)$: $x^2 + (-y)^2 + 6x + 4(-y) + 1 = 0$

$y = x$ রেখার " $(x \leftrightarrow y)$: $y^2 + x^2 + 6y + 4x + 1 = 0$

না বুঝে
মুখস্থ করার
অভ্যাস প্রতিভাকে
ধ্বংস করে