লাল-সবুজে দাগানো

TEXT BOOK

পদার্থবিজ্ঞান

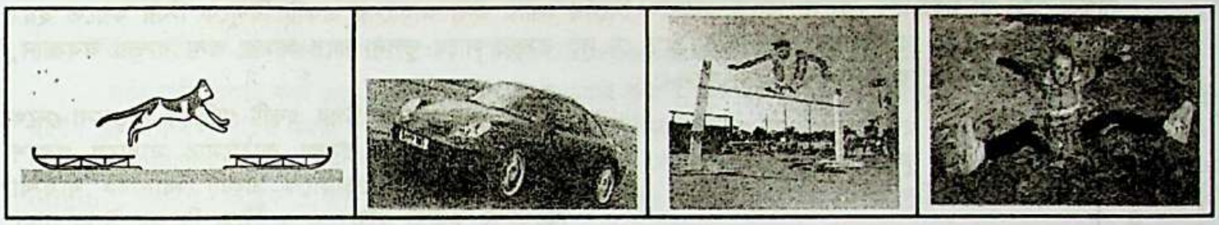
১ম পত্র

উন্মেষ

মেডিকেল এন্ড ডেন্টাল এডমিশন কেয়ার

৩
গতিবিদ্যা
DYNAMICS

প্রধান শব্দ (Key Words) : প্রসঙ্গ কাঠামো, সরণ, গড় দ্রুতি, তাৎক্ষণিক দ্রুতি বা দ্রুতি, গড় বেগ, তাৎক্ষণিক বেগ বা বেগ, সমবেগ, গড় ত্বরণ, তাৎক্ষণিক ত্বরণ বা ত্বরণ, সমত্বরণ, পড়ন্ত বস্তুর সূত্র, প্রক্ষেপক, বিচরণ কাল, পাল্লা, বৃত্তাকার গতি, সুষম বৃত্তাকার গতি, কেন্দ্রমুখি বা অভিকেন্দ্র ত্বরণ।



সূচনা
Introduction

গতিবিদ্যা হলো গতি সংক্রান্ত বিজ্ঞান। পদার্থবিজ্ঞানে গতিবিদ্যা একটি অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ শাখা। এই শাখায় বলের ক্রিয়ায় বস্তুর গতিই প্রধান আলোচ্য বিষয়। গতিবিদ্যা কোনো বস্তুর ওপর আরোপিত অথবা প্রয়োগকৃত বলের ফলে সৃষ্ট গতির অনুসন্ধান, প্রকৃতি এবং সম্পর্ক স্থাপন করে। সমত্বরণযুক্ত অসমবেগে চলমান বস্তুর গতিই মূলত এখানে বিবেচনা করা হয়। বস্তুর গতি আলোচনায় বস্তুর আকার, আয়তন এবং আকৃতি উপেক্ষা করে বস্তুটিকে কণা হিসেবে বিবেচনা করা শ্রেয়। কণা বলতে এমন একটি বস্তু বুঝায় যার ভর একটি বিন্দুতে সংহত আছে ধরা হয়। অর্থাৎ কণার ভর আছে কিন্তু আয়তন নগণ্য। যেমন একটি মোটর গাড়ির দ্রুতি, ত্বরণ, অবস্থান ইত্যাদি নির্ণয় করতে গাড়ির আকার বা আয়তন বিবেচনা করা হয় না। এক্ষেত্রে গাড়িটিকে কণা বিবেচনা করা হয়।

এ অধ্যায় পাঠ শেষে শিক্ষার্থীরা—

- জড় কাঠামোর ধারণা ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- পরম গতি ও আপেক্ষিক গতি বর্ণনা করতে পারবে।
- গতি বর্ণনায় অন্তরীকরণ ও যোগজীকরণের প্রাথমিক ধারণা ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- অবস্থান-সময় ও বেগ-সময় লেখচিত্র বিশ্লেষণ করতে পারবে।
- প্রক্ষেপকের গতি বিশ্লেষণ করতে পারবে।
- পড়ন্ত বস্তুর সূত্র ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- সুষম বৃত্তীয় গতি ব্যাখ্যা করতে পারবে।

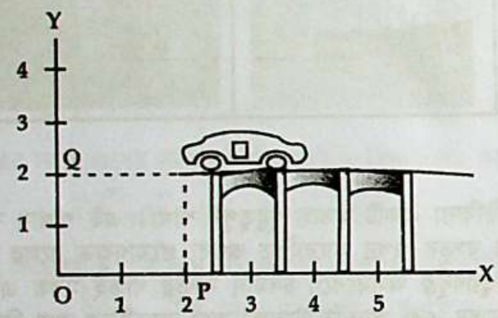
৩.১ প্রসঙ্গ কাঠামো
Frame of reference

যেকোনো সরলরেখা বরাবর গতিশীল একটি বস্তুর সরণ, বেগ, ত্বরণ ইত্যাদিকে স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় যেকোনো একটি অক্ষ বরাবর বিবেচনা করে বস্তুটির গতিকে সম্পূর্ণভাবে বর্ণনা করা যায়। কোনো গতির বর্ণনার জন্য একটি প্রসঙ্গ কাঠামোর প্রয়োজন হয় যার সাপেক্ষে গতি বিবেচনা করা হয়। একটি বস্তু X-অক্ষ বরাবর গতিশীল হলে তার সরণ, বেগ, ত্বরণ যথাক্রমে x, v_x, a_x হবে। এক্ষেত্রে দেখা যায় কোনো বস্তুর গতির সম্যক অবস্থা বা গতিশীল বস্তুর অবস্থান নির্ণয়ের জন্য প্রয়োজন হয় কোনো না কোনো প্রসঙ্গ স্থানাঙ্ক ব্যবস্থা (coordinate system)। এই স্থানাঙ্ক ব্যবস্থাকে বলা হয় প্রসঙ্গ কাঠামো (reference frame)। সবচেয়ে সহজ এবং পরিচিত প্রসঙ্গ কাঠামো হলো কার্তেসীয় অক্ষ পদ্ধতি (Cartesian coordinate system)। এর দ্বারা একটি বস্তুকণার অবস্থান তিনটি পরস্পর লম্ব অক্ষ X, Y, Z দ্বারা নির্দিষ্ট করা যায়।

তোমার পড়ার ঘরে একটি প্রজাপতি প্রবেশের পর এদিক-ওদিক উড়তে দেখ। এখন মনে কর প্রজাপতিটি তোমার পড়ার ঘরে বুক সেলফ-এর ওপর এসে বসল। প্রজাপতিটিকে নির্দিষ্ট করতে ঘরের যেকোনো কোণাকে মূলবিন্দু (origin) ধরে দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা বরাবর নির্দিষ্ট পরিমাণ স্থান, ফিতা দিয়ে পরিমাপ করে প্রজাপতির অবস্থান নির্দিষ্ট করা যায়। মনে করা যাক ঘরের কোণা থেকে দৈর্ঘ্য বরাবর 5m, প্রস্থ বরাবর 3m এবং উচ্চতা বরাবর 2m মেপে প্রজাপতিটিকে নির্দিষ্ট করা হলো। এক্ষেত্রে প্রজাপতির স্থানাঙ্ক হবে (5, 3, 2); আবার তুমি যদি ঘরের বাইরের কোনো বিন্দুকে মূলবিন্দু ধরে প্রজাপতির অবস্থান নির্ণয় করতে যাও তাহলে স্থানাঙ্ক ব্যবস্থা পরিবর্তিত হবে। কার্তেসীয় পদ্ধতি ছাড়াও বস্তুর অবস্থান অন্যভাবে নির্ণয় করা যায়। যেমন গোলকভিত্তিক (spherical) বা সিলিন্ডারভিত্তিক (cylindrical)

স্থানাঙ্ক নির্দেশ পদ্ধতি। অর্থাৎ কোনো বস্তুর গতির বর্ণনার জন্য ত্রিমাত্রিক স্থানে যে সুনির্দিষ্ট স্থানাঙ্ক ব্যবস্থা বিবেচনা করা হয় এবং যার সাপেক্ষে বস্তুটির গতি বর্ণনা করা হয় তাকে প্রসঙ্গ কাঠামো বলে। ভূপৃষ্ঠ, গ্রহ, সূর্য, কোনো বিন্দু ইত্যাদিকে প্রসঙ্গ কাঠামো হিসেবে বিবেচনা করতে পার। তবে এদের সব সময়ই সুনির্দিষ্ট করতে হবে। কোনো বস্তুর স্থানাঙ্ক সময় ও প্রসঙ্গ কাঠামোর সাপেক্ষে পরিবর্তিত অথবা স্থির থাকতে পারে। কোনো বস্তুর সকল বিন্দুর স্থানাঙ্ক যদি সময় ও প্রসঙ্গ কাঠামোর সাপেক্ষে স্থির থাকে তাহলে বস্তুর এই অবস্থাকে **স্থিতি** বলে। বস্তুটির যেকোনো বিন্দুর স্থানাঙ্ক যদি সময় ও প্রসঙ্গ কাঠামোর সাপেক্ষে পরিবর্তিত হয় তাহলে বস্তুর এই অবস্থাকে **গতি** বলে।

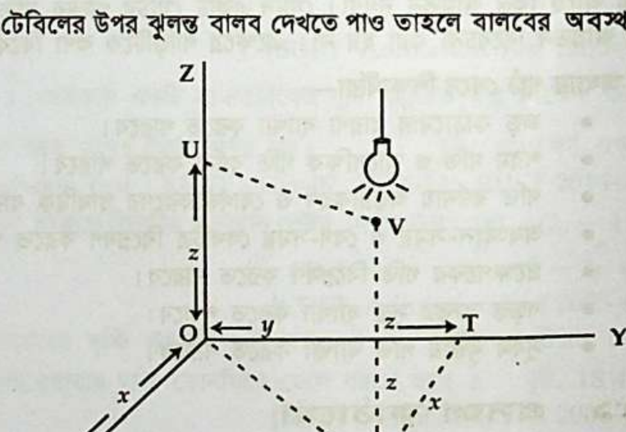
পৃথিবী পৃষ্ঠে বা মহাবিশ্বে কোনো কিছুর অবস্থান নির্দেশ করার জন্য আমাদের একটি বিন্দুকে স্থির করতে হয়। এই বিন্দুকে আমরা মূলবিন্দু বা প্রসঙ্গ বিন্দু বলি, আর যে দৃঢ় বস্তুর সাথে তুলনা করে আমরা অন্য বস্তুর অবস্থান, স্থিতি ও গতি নির্ণয় করি তাকে প্রসঙ্গ কাঠামো বলে।



চিত্র ৩.১

তুমি ব্রিজের উপর একটি গাড়িকে দাঁড়ানো দেখে তার অবস্থান যদি প্রসঙ্গ কাঠামোর মাধ্যমে প্রকাশ করতে চাও তবে তোমাকে একটি স্থানাঙ্ক ব্যবস্থা বিবেচনা করতে হবে। ৩.১ চিত্রে ব্রিজের উপর রাখা একটি গাড়ির অবস্থান দ্বিমাত্রিক স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় X অক্ষের দিকে OP দূরত্ব এবং Y অক্ষের দিকে OQ দূরত্ব প্রকাশের মাধ্যমে মূলবিন্দুর সাপেক্ষে গঠিত প্রসঙ্গ কাঠামোতে গাড়িটির অবস্থান নির্দেশ করছে। এক্ষেত্রে $OP = x = 2$ একক এবং $OQ = y = 2$ একক নির্দেশ করে অর্থাৎ গাড়িটির অবস্থানের স্থানাঙ্ক হবে চিত্র ৩.১ অনুযায়ী $(2, 2)$।

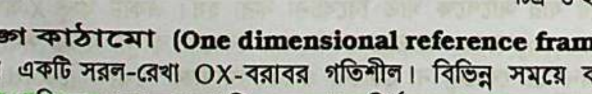
তুমি যখন ডাইনিং টেবিলে খেতে বস তখন যদি টেবিলের উপর ঝুলন্ত বালব দেখতে পাও তাহলে বালবের অবস্থান বুঝাতে তুমি কী করবে? বালবটি যেহেতু মেঝেতে নেই আবার দেওয়ালের উপরও নেই, আছে ঝুলন্ত অবস্থায়, তাই তোমাকে পরস্পর লম্ব তিনটি সরল-রেখা রেখা OX, OY, OZ অঙ্কন করে বালবটি নির্দিষ্ট করতে হবে। এখানে মূলবিন্দু এবং অক্ষত্রয় সমন্বয়ে একটি ত্রিমাত্রিক প্রসঙ্গ কাঠামো (Three dimensional reference frame) গঠিত হয়েছে। ৩.২ চিত্রে V দ্বারা বালবের অবস্থান নির্দেশ করা হয়েছে। চিত্র অনুযায়ী $OR = WT = x$, $OT = RW = y$ এবং $OU = VW = z$। তাহলে বালবটির অবস্থানের স্থানাঙ্ক হবে (x, y, z)। আপেক্ষিক স্থিতি এবং আপেক্ষিক গতি নির্ণয়ের জন্যে প্রসঙ্গ বিন্দু (বা প্রামাণ্য বিন্দু) ও প্রসঙ্গ কাঠামো (বা প্রামাণ্য কাঠামো)-এর প্রয়োজন।



চিত্র ৩.২

(১) একমাত্রিক প্রসঙ্গ কাঠামো (One dimensional reference frame)

মনে করি একটি কণা একটি সরল-রেখা OX-বরাবর গতিশীল। বিভিন্ন সময়ে কণাটির অবস্থান একটি বিন্দু সাপেক্ষে নির্ণয় করতে হয়। **যে বিন্দুর সাপেক্ষে কণাটির অবস্থান নির্ণয় করা হয়, তাকে প্রসঙ্গ বিন্দু বা নির্দেশ বিন্দু বলে।** চিত্রে O-কে প্রসঙ্গ বিন্দু ধরে নেয়া হয়েছে।



চিত্র ৩.৩

OX সরলরেখাকে X-অক্ষ বলা হয়। প্রসঙ্গ বিন্দু O এবং X-অক্ষ নিয়ে গঠিত হয়েছে একটি একমাত্রিক কাঠামো। এ কাঠামোর সাহায্যে কণার যেকোনো সময়ের অবস্থান নির্ণয় করা হয় [চিত্র ৩.৩]।

মনে করি একটি নির্দিষ্ট সময়ে কণাটি A অবস্থানে আছে। উক্ত সময়ে O বিন্দু হতে কণাটির দূরত্ব $= OA = x$। কণাটি স্থিতিশীল হলে x-এর একটিমাত্র মান থাকবে। আর কণাটি গতিশীল হলে x-এর মান বিভিন্ন হবে। এখানে

x-কে স্থানাঙ্ক বলা হয়। একটিমাত্র স্থানাঙ্ক দ্বারা কণাটির অবস্থান নির্দেশিত হওয়ায় কণাটি একমাত্রিক স্থানে অবস্থিত। **যে বস্তুর বিভিন্ন কণার অবস্থান একটিমাত্র স্থানাঙ্ক দ্বারা নির্দেশ করা হয় তাকে একমাত্রিক প্রসঙ্গ কাঠামো বলে।**

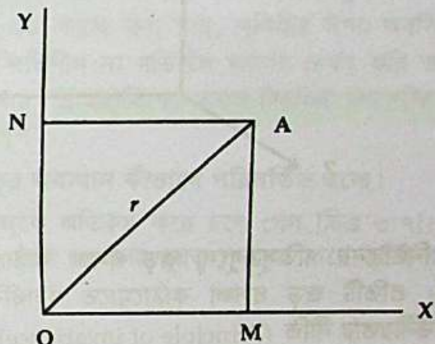
মুক্তভাবে পড়ন্ত একটি বস্তুর গতি আলোচনা করলে দেখা যাবে বিভিন্ন সময়ে বস্তুর অবস্থান বিভিন্ন হবে। এর গতি একটি একমাত্রিক কাঠামো দ্বারা প্রকাশ করা যাবে। যে বিন্দু হতে বস্তুটি পড়তে শুরু করে তাকে **প্রসঙ্গ বিন্দু** বলে এবং এর গতিপথ X-অক্ষ ধরা হবে।

উদাহরণ : একটি দীর্ঘ সরু দণ্ড, একটি দীর্ঘ সরু সূতা, ঝুলন্ত সুতা ইত্যাদি একমাত্রিক বস্তু ভাবা যায়।

(২) দ্বিমাত্রিক প্রসঙ্গ কাঠামো (Two dimensional reference frame)

মনে করি একটি কণা একটি সমতলে অবস্থিত। ধরি কণাটি গতিশীল। সেজন্য বিভিন্ন সময়ে এর অবস্থান বিভিন্ন হবে। এর অবস্থান সূচিত করার লক্ষ্যে পরস্পর দুটি লম্বিক সরলরেখার দরকার। চিত্রে OX ও OY এরূপ দুটি সরলরেখা। এই দুটি সরলরেখা পরস্পর O বিন্দুতে মিলিত হয়েছে। অতএব O হলো **প্রসঙ্গ বিন্দু** বা **মূলবিন্দু** (reference or origin)। এখানে OX-কে X অক্ষ ও OY-কে Y অক্ষ বলা হয়। প্রসঙ্গ বিন্দু এবং অক্ষ দুটি মিলে একটি কাঠামো তৈরি হয়েছে। এর নাম **দ্বিমাত্রিক কাঠামো** [চিত্র ৩.৪]।

মনে করি একটি নির্দিষ্ট সময়ে একটি কণা A অবস্থানে আছে। A হতে OX-এর উপর AM এবং OY-এর উপর AN লম্ব টানি। তা হলে $OM = AN = x$; $AM = ON = y$। এখানে A-এর অবস্থান x ও y দুইটি স্থানাঙ্ক দ্বারা সূচিত হয়েছে। অন্যভাবে বলা যায় A হলো একটি বিন্দু যার স্থানাঙ্ক x ও y। অতএব **কোনো একটি বস্তুর বিভিন্ন কণার অবস্থান দুটি স্থানাঙ্ক দ্বারা নির্দেশ করা হলে উক্ত বস্তুটিকে দ্বিমাত্রিক বস্তু বলে।** OA যুক্ত করি। $OA = r$ হলে, O হতে ঐ কণার দূরত্ব হবে r।

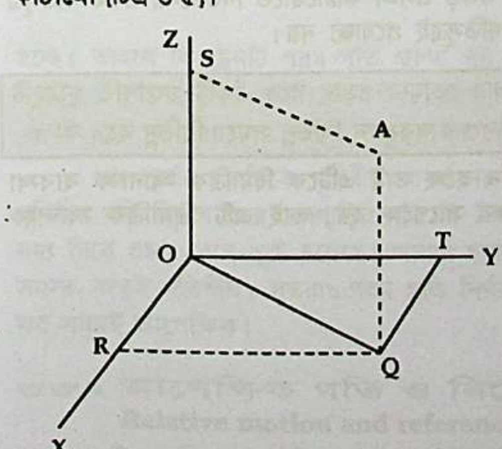


চিত্র ৩.৪

উদাহরণ : ফুটবল খেলার মাঠে একটি গতিশীল ফুটবল দ্বিমাত্রিক স্থানে দৌড়াচ্ছে। পাতলা কাগজ, পাতলা ধাতব পাত ইত্যাদি দ্বিমাত্রিক বস্তু।

(৩) ত্রিমাত্রিক প্রসঙ্গ কাঠামো (Three dimensional reference frame)

মনে করি বায়ুভর্তি কামরার মধ্যে একটি কণা অবস্থিত। কণাটির অবস্থান নির্দেশ করার জন্য পরস্পর লম্বভাবে অবস্থিত তিনটি সরলরেখা দরকার। ধরি সরলরেখা তিনটি যথাক্রমে OX, OY এবং OZ। সরলরেখা তিনটি পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করেছে। অতএব O বিন্দু হলো **মূল বিন্দু** বা **প্রসঙ্গ বিন্দু**। এখানে OX কে X অক্ষ, OY কে Y-অক্ষ এবং OZ কে Z-অক্ষ বলা হয়। মূল বিন্দু O এবং তিনটি অক্ষ মিলে যে কাঠামো তৈরি হয়েছে তার নাম **ত্রিমাত্রিক প্রসঙ্গ কাঠামো** [চিত্র ৩.৫]।



চিত্র. ৩.৫

মনে করি কোনো নির্দিষ্ট সময়ে কণাটি A অবস্থানে আছে। A হতে XY তলের উপর AQ লম্ব টানি। Q হতে OX-এর উপর QR এবং OY-এর উপর QT লম্ব টানি। A হতে OZ-এর উপর AS লম্ব টানি।

তাহলে $OR = QT = x$

$OT = RQ = y$

এবং $OS = AQ = z$

এখানে A-এর অবস্থান x, y এবং z এই তিনটি স্থানাঙ্ক দ্বারা নির্দেশ করা হয়েছে। মূল বিন্দু O এবং এই তিনটি স্থানাঙ্ক-সহ এই কাঠামোকে ত্রিমাত্রিক কাঠামো বলে। **কোনো একটি বস্তুর বিভিন্ন কণা এই কাঠামোয় অবস্থান করলে বস্তুটিকে ত্রিমাত্রিক বস্তু বলে।**

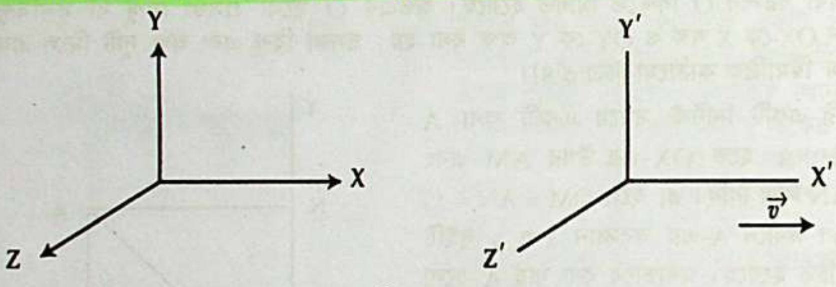
উদাহরণ : টেবিল, চেয়ার, ইট, পাথর ইত্যাদি ত্রিমাত্রিক বস্তু।

৩·২ জড় ও অজড় প্রসঙ্গ কাঠামো
Inertial and non-inertial frame of reference

৩·২·১ জড় প্রসঙ্গ কাঠামো
Inertial frame of refernece

ভূপৃষ্ঠে বা তার কাছাকাছি অবস্থানে কোনো বস্তুর গতি বর্ণনার সময় ভূপৃষ্ঠকে স্থির প্রসঙ্গ কাঠামো ধরা হয়। এখন ভূপৃষ্ঠে অবস্থিত কোনো একটি পাথরখণ্ডে যতক্ষণ পর্যন্ত কোনো বাহ্যিক বল প্রয়োগ না করা হয় ততক্ষণ পর্যন্ত পাথরখণ্ডটি স্থির থাকে। আবার অন্যদিকে সমবেগে গতিশীল একটি ট্রেনের কামরায় একটি বল মেঝেতে পড়ে থাকলে বাহ্যিক কোনো বল প্রয়োগ না করলে সেটি স্থির থাকে। সুতরাং দেখা যাচ্ছে যে স্থির বা সমবেগে গতিশীল প্রসঙ্গ কাঠামোতে নিউটনের প্রথম গতিসূত্র প্রযোজ্য হয়। এই প্রসঙ্গ কাঠামোকে জড় প্রসঙ্গ কাঠামো বলে।

সংজ্ঞা : যে প্রসঙ্গ কাঠামোর কোনো ধরনের ত্বরণ বা মন্দন থাকে না, অর্থাৎ যে প্রসঙ্গ কাঠামো স্থির বা সমবেগে সরলরেখায় গতিশীল সেই প্রসঙ্গ কাঠামোকে জড় প্রসঙ্গ কাঠামো বলে।



চিত্র ৩.৬

নিউটনের গতিসূত্রগুলো জড় প্রসঙ্গ কাঠামোতে প্রযোজ্য হয়। চিত্র ৩.৬-এ জড় প্রসঙ্গ কাঠামো দেখানো হয়েছে। প্রতিটি জড় প্রসঙ্গ কাঠামোতে পদার্থবিজ্ঞানের সকল সূত্র অপরিবর্তিত থাকে। এই নীতিকে নিউটনের অপরিবর্তনীয়তার নীতি (Principle of invariance) বলা হয়।

৩·২·২ অজড় প্রসঙ্গ কাঠামো
Non-inertial frame of refernece

সংজ্ঞা : জড় প্রসঙ্গ কাঠামোর সাপেক্ষে ত্বরণ বা মন্দনসহ গতিশীল প্রসঙ্গ কাঠামোকে অজড় প্রসঙ্গ কাঠামো বলা হয়।

নিউটনের গতিসূত্রগুলো অজড় প্রসঙ্গ কাঠামোতে প্রযোজ্য হয় না।

উদাহরণ : ধরা যাক, একটি স্থির ট্রেনের কামরায় একটি বল স্থির অবস্থায় রয়েছে। এখন ট্রেনটি ত্বরণসহ চলতে শুরু করল। দেখা যাবে বলটি পিছনের দিকে গতিশীল হয়েছে। এক্ষেত্রে বলটির ওপর বাহ্যিক কোনো বল প্রয়োগ করা হয়নি। কিন্তু স্থির বলটি চলতে শুরু করেছে। সুতরাং, এখানে নিউটনের প্রথম গতিসূত্র প্রযোজ্য নয়। ত্বরণসহ গতিশীল ট্রেনটি একটি অজড় প্রসঙ্গ কাঠামো। সুতরাং দেখা যাচ্ছে যে অজড় প্রসঙ্গ কাঠামোতে নিউটনের প্রথম গতিসূত্র প্রযোজ্য নয়। প্রকৃতপক্ষে অজড় প্রসঙ্গ কাঠামোতে নিউটনের কোনো গতিসূত্রই প্রযোজ্য নয়।

হাতে কলমে কাজ: ফুটবল মাঠে দুই দল ছেলে ফুটবল খেলছে, আবার তোমার পড়ার ঘরে একটি প্রজাপতি ছুটাছুটি করছে। এই দুটি ঘটনাকে প্রসঙ্গ কাঠামো ব্যবস্থায় উপস্থাপন কর। ফুটবলের অবস্থান বিভিন্ন সময়ে বিভিন্ন হবে কী ?

ফুটবল খেলার সময় সমতলের ওপর ফুটবলের অবস্থান পরিবর্তন হচ্ছে তাই এটিকে দ্বিমাত্রিক স্থানাঙ্ক ব্যবস্থা বলা হয়। অন্যদিকে প্রজাপতির অবস্থান প্রতিটি স্থানে তিনটি অক্ষের সাপেক্ষে হয়, তাই এটি ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় ঘটে। ফুটবলের অবস্থান সময়ের সাথে পরিবর্তিত হবে।

৩·৩ পরম গতি ও আপেক্ষিক গতি
Absolute motion and Relative motion

৩·৩·১ পরম গতি
Absolute motion

তুমি যখন রাস্তা দিয়ে হেঁটে কলেজে যাও তখন রাস্তার ওপর চলন্ত অনেক গাড়ি, রিকশা এবং আশেপাশে অনেক গাছ দেখতে পাও। এক্ষেত্রে গাড়ি ও রিকশা গতিশীল আর গাছ স্থির। আবার ভ্যাকুয়াম ক্লিনার দিয়ে যখন মেঝে পরিষ্কার করতে দেখ তখন ভ্যাকুয়াম ক্লিনারের আশেপাশের প্রত্যেকটি বস্তু থেকে ভ্যাকুয়াম ক্লিনারের দূরত্ব এবং দিক

ক্রমাগত পরিবর্তন হয়। অর্থাৎ সময়ের সাথে সাথে ভ্যাকুয়াম ক্লিনারের অবস্থানের পরিবর্তন হয়। এক্ষেত্রে আমরা বলি পরিপার্শ্বের সাপেক্ষে ভ্যাকুয়াম ক্লিনারটি গতিশীল। সময়ের সাথে সাথে পরিপার্শ্বের সাপেক্ষে যখন কোনো বস্তুর অবস্থানের পরিবর্তন ঘটে তখন তাকে গতিশীল বস্তু বলি। কোনো বস্তু স্থির না গতিশীল তা বুঝার জন্য প্রসঙ্গ বস্তু তথা প্রসঙ্গ কাঠামো বিবেচনা করতে হয়। যেমন গাছের তুলনায় রিকশাটি যদি গতিশীল হয় তখন আলোচ্য বস্তু বা রিকশাকে গতিশীল ধরা হয়। আবার রিকশা ও গাড়ি যদি একই দিকে একই বেগে চলতে থাকে তাহলে সময়ের সাথে তাদের মধ্যবর্তী দূরত্বের কোনো পরিবর্তন হবে না। এক্ষেত্রে একটির তুলনায় অপরটি গতিশীল ধরা হয়। আবার চলন্ত উড়োজাহাজে দুই বন্ধু যদি মুখোমুখি বসে গল্প করতে থাকে তাহলে সময়ের পরিবর্তনের সাথে সাথে তাদের অবস্থানের কোনো পরিবর্তন হবে না। সুতরাং বলা যায় একজনের সাপেক্ষে অপরজন স্থির। আমরা দেখতে পাচ্ছি কোনো বস্তু প্রকৃতপক্ষে স্থির না গতিশীল তা নির্ণয়ে একটি প্রসঙ্গ বস্তু নির্ধারণ করে নিতে হয়।

প্রসঙ্গ বস্তু যদি প্রকৃতপক্ষে স্থির হয় তাহলে তার সাপেক্ষে যে বস্তু স্থিতিশীল রয়েছে সেও প্রকৃতপক্ষে স্থির। এ ধরনের স্থিতিকে আমরা পরম স্থিতি বলি। প্রসঙ্গ বস্তুটি যদি পরম স্থিতিতে থাকে তাহলেই কোনো বস্তু তার সাপেক্ষে স্থির থাকলে সে বস্তুকে পরম স্থিতিশীল বলি। আবার **প্রসঙ্গ বস্তুটি যখন পরম স্থিতিতে থাকে তখন তার সাপেক্ষে অন্য কোনো বস্তু গতিশীল থাকলে তাকে পরম গতি বলি**। এই মহাবিশ্বে আমরা যা কিছু দেখি যেমন চন্দ্র, গ্রহ, উপগ্রহ, পৃথিবী সবই প্রতিনিয়ত সূর্যের চারদিকে ঘুরছে। তাই এক কথায় বলা যায়, পৃথিবীর উপর অবস্থিত সকল বস্তু স্থির নয়—সকল বস্তু গতিশীল। আমরা যখন কোনো বস্তু স্থিতিশীল না গতিশীল জানার চেষ্টা করি তা কোনো আপাত স্থিতিশীল বস্তুর সাপেক্ষে বিবেচনা করি। এক কথায় বলা যায় **"এ মহাবিশ্বের সকল স্থিতিই আপেক্ষিক, সকল গতিই আপেক্ষিক। কোনো গতিই পরম নয়, পরম নয় কোনো স্থিতি।"**

নিচের উদাহরণগুলি লক্ষ করে দেখ সময়ের সাথে সাথে বস্তুর অবস্থান কীভাবে পরিবর্তিত হচ্ছে।

(ক) রাজু স্টেশনের প্লাটফর্মে দাঁড়িয়ে দেখল একটি ট্রেন রাজুকে অতিক্রম করে চলে গেল [চিত্র ৩·৭]। তাহলে ট্রেনটি রাজুর অবস্থানের সাপেক্ষে গতিশীল। এক্ষেত্রে ট্রেনটির এবং রাজুর মধ্যকার দূরত্ব সময়ের সাথে সাথে পরিবর্তিত

চিত্র ৩·৭

হচ্ছে। তাহলে কি ট্রেনটি পরম গতি প্রাপ্ত নয় ? ট্রেনটি যদিও রাজুর সাপেক্ষে গতিশীল কিন্তু পৃথিবী নিজে সূর্যের চারদিকে ঘূর্ণনের জন্য পৃথিবীকে কখনও পরম স্থিতি বিবেচনা করা যায় না। এক্ষেত্রে ট্রেনটির গতি পরম গতি নয়। এভাবে তুমি পৃথিবীর উপর বিভিন্ন বস্তুর গতির কথা ভাব এবং পরম স্থিতি ও পরম গতি বুঝার চেষ্টা কর।

(খ) সূর্যের চারদিকে পৃথিবীর আবর্তনের বিস্তৃত তথ্য বিজ্ঞানীরা অনেকদিন আগেই গণনা করেছেন। অর্থাৎ পৃথিবীর গতি হিসাব করে রেলগাড়ির গতি কি নির্ণয় করা যায় না ? কিন্তু সূর্যও স্থির নয়। সমস্ত সৌরজগৎই ছায়াপথের মধ্য দিয়ে প্রচণ্ড বেগে ছুটে চলেছে। আবার ছায়াপথগুলোও একে অন্যের সাপেক্ষে গতিশীল। প্রকৃতপক্ষে এই মহাবিশ্বের সমস্ত বস্তুই গতিশীল। সুতরাং পরম গতি নির্ণয় করা অসম্ভব। অতএব বলা যায়, **কোনো বস্তুর স্থিতি অথবা গতি সব সময়ই আপেক্ষিক।**

৩·২ আপেক্ষিক গতি ও নির্দেশ কাঠামো
Relative motion and reference frame

এই মহাবিশ্বে আমাদের জানা কোনো বস্তুই স্থির নয়; অর্থাৎ পরম স্থিতি কি তা আমরা জানি না। কোনো একটি বস্তু স্থির বা গতিশীল বলতে আমরা বুঝি অন্য কোনো একটি বস্তুর সাপেক্ষে ওই বস্তুটি স্থির না গতিশীল। যেমন, রাস্তার পাশে দাঁড়িয়ে থাকা একজন দর্শকের কাছে গতিশীল একটি ট্রেনের যাত্রীকে গতিশীল মনে হবে।

পক্ষান্তরে গতিশীল ট্রেনের একজন যাত্রীর রাস্তার পাশে দাঁড়িয়ে থাকা একটি গাছকে ট্রেনের বিপরীত দিকে গতিশীল মনে হবে। আবার, সমবেগে একই দিকে ধাবমান দুটি ট্রেনের দুজন যাত্রীর পরস্পরকে স্থির বলে মনে হবে; কিন্তু ট্রেন দুটি বিপরীত দিকে ধাবমান হলে একজন যাত্রীর কাছে অন্য ট্রেনের যাত্রী অনেক বেশি বেগে দ্রুত পেরিয়ে যাচ্ছে মনে হবে। এগুলো সবই আপেক্ষিক। অর্থাৎ সব স্থিতি বা গতিই হলো আপেক্ষিক স্থিতি বা আপেক্ষিক গতি।

কোনো একটি বস্তুর অবস্থান নির্ণয় অপর একটি বস্তুর সাহায্য ছাড়া সম্ভব নয়। এই অপর বস্তুটিকে নির্দেশ বস্তু বা নির্দেশ কাঠামো (frame) বলা হয়।

৩.৪ গতি বর্ণনায় অন্তরীকরণ ও যোগজীকরণের প্রাথমিক ধারণা
Preliminary idea of differentiation and integration to describe motion

৩.৪.১ অন্তরীকরণ
Differentiation

মনে কর একটি রাশি অন্য একটি রাশির ওপর নির্ভরশীল, তাহলে গণিতের ভাষায় এ নির্ভরশীল রাশিটি অপরটির অপেক্ষক (function) হয়।

y রাশিটি x রাশির উপর নির্ভরশীল হলে y, x-এর একটি অপেক্ষক হয়।

অর্থাৎ $y = f(x)$ ... ... (3.1)

আবার y-এর ক্ষুদ্রতম পরিবর্তন Δy এর জন্য x এর ক্ষুদ্রতম পরিবর্তন Δx ধরলে y এবং x এর ক্ষুদ্রতম পরিবর্তনের জন্য লেখা যায়

$$y + \Delta y = f(\Delta x + x) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3.2)$$

বা, $\Delta y = f(\Delta x + x) - y$

বা, $$\Delta y = f(\Delta x + x) - f(x) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3.3)$$

$$\therefore \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(\Delta x + x) - f(x)}{\Delta x} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3.4)$$

এখানে $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ হলো উল্লেখিত ক্ষুদ্রতম পরিবর্তনের জন্য x এর সাপেক্ষে y এর পরিবর্তনের হার। হর Δx এর মান যখন শূন্যের কাছাকাছি হয় তখন (3.4) নং সমীকরণকে লেখা যায়

$$\underset{\Delta x \to 0}{\text{Lt}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \underset{\Delta x \to 0}{\text{Lt}} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3.5)$$

বা, $$\frac{dy}{dx} = \underset{\Delta x \to 0}{\text{Lt}} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3.6)$$

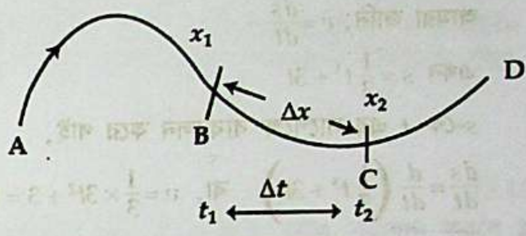
এখানে $\frac{dy}{dx}$ হলো, x এর অতি ক্ষুদ্র পরিবর্তনের জন্য x এর সাপেক্ষে y এর পরিবর্তনের হার। $\frac{dy}{dx}$ কে x এর সাপেক্ষে y এর differential সহগও বলে এবং $\frac{dy}{dx}$ এর মান নির্ণয়ের পদ্ধতিকে অন্তরীকরণ বা ব্যবকলন বলে। গতির বর্ণনার ক্ষেত্রে এই অন্তরীকরণ পদ্ধতি প্রয়োগ করা যায়। এখানে $\frac{dy}{dx}$ একটি প্রতীক, যা y-এর উপর $\frac{d}{dx}$ এর ক্রিয়াকে নির্দেশ করে। ইহা dy ও dx এর ভাগফল নয়। $\frac{dy}{dx}$, x এর সাপেক্ষে y এর পরিবর্তনের হার বুঝায়।

মনে কর তুমি তোমার বন্ধুর মোটর সাইকেলে করে নিউমার্কেট থেকে মতিঝিল যাচ্ছ। তাহলে যাওয়ার পথে তুমি লক্ষ করবে মোটর সাইকেল কখনও একই বেগে চলেনি। কখনও ধীরে কখনও দ্রুত চলেছে। কখনও ব্রেক চেপে থামতেও হয়েছে। ফলে মোটর সাইকেলটির গতি সুষম ছিল না। কিন্তু তোমাকে যদি মোটর সাইকেলটির বেগ নির্ণয় করতে বলা হয় তাহলে তুমি নিউমার্কেট থেকে মতিঝিলের মোট দূরত্ব নিয়ে মোট অতিক্রান্ত সময় দ্বারা ভাগ করে বেগের মান নির্ণয় করে নিবে। এক্ষেত্রে এই নির্ণেয় বেগ গড় বেগ বুঝাবে। অর্থাৎ সময়ের সাপেক্ষে দুই অবস্থানের পরিবর্তন হবে বেগ v, অর্থাৎ $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$।

$\frac{\Delta x}{\Delta t}$ কে বলা হয় উল্লিখিত সময়ের পরিবর্তনের জন্য x-এর সাপেক্ষে সময়ের পরিবর্তনের হার বা বেগ। আবার সময়ের মান ক্ষুদ্র হলে উক্ত সময়ের বেগই হলো তাৎক্ষণিক বেগ। এক্ষেত্রে এই বেগকে অন্তরীকরণের মাধ্যমে প্রকাশ

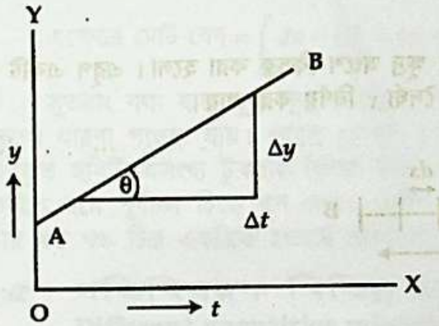
করা যায়; অর্থাৎ $\Delta t \to 0$ হলে $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ এর নির্দিষ্ট মান পাওয়া যায় তাহলে ওই সীমাস্থ মানকে অর্থাৎ $\underset{\Delta t \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{\Delta x}{\Delta t}$ কে $x(t)$ অপেক্ষকের t এর সাপেক্ষে বৃদ্ধির হার বা অন্তরক সহগ বা তাৎক্ষণিক বেগ বলে।

ধরা যাক একটি কণার গতিপথ AD এবং এই গতিপথের ওপর একটি বিন্দু B-তে এর বেগের মান নির্ণয় করতে হবে। তাহলে ধরা যাক t সময়ে কণার অবস্থান B এবং $t + \Delta t$ সময়ে কণার অবস্থান C [চিত্র ৩.৮]।



চিত্র ৩.৮

এক্ষেত্রে B ও C বিন্দুর মধ্যে দূরত্বের ব্যবধান Δx এবং সময়ের ব্যবধান Δt, তাহলে বেগের মান, $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$; বলা যায় t-এর সাপেক্ষে x-এর পরিবর্তন হলো অন্তরীকরণের ভাষায় বেগের মান।



চিত্র ৩.৯

আবার t এর Δt পরিবর্তনের জন্য Δy এর অতি ক্ষুদ্র পরিবর্তন লেখচিত্রের মাধ্যমে প্রকাশ করা যায় [চিত্র ৩.৯]। আলোচ্য ক্ষেত্রে Δy তথা Δt অতি ক্ষুদ্র হলে $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ সরলরেখাটির ঢাল নির্দেশ করবে।

$$\therefore \quad \underset{\Delta t \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \text{ঢাল}$$

$$\text{বা,} \quad \frac{dy}{dt} = \text{ঢাল}$$

অর্থাৎ সরণ (y) বনাম সময় (t) লেখচিত্র থেকে ঢাল নির্ণয়ের মাধ্যমে সময়ের পরিবর্তনের সাথে সরণের পরিবর্তন দ্বারা বেগ নির্ণয় করতে পারি।

আবার, মনে করি $x = f(t) = t^2$

$$\therefore \quad \frac{dx}{dt} = \underset{\Delta t \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \underset{\Delta t \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

$$= \underset{\Delta t \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{(t + \Delta t)^2 - t^2}{\Delta t}$$

$$= \underset{p \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{(t + p)^2 - t^2}{p}, \quad \Delta t = p \text{ ধরি}$$

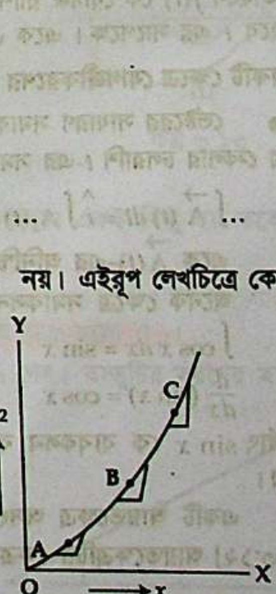
$$= \underset{p \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{2tp + p^2}{p} = \underset{p \to 0}{\mathrm{Lt}}\, 2t + p = 2t$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dt}(t^2) = 2t \qquad \ldots \quad \ldots \quad (3.7)$$

নিচের লেখচিত্রে বক্র রেখায় বিভিন্ন বিন্দুতে অঙ্কিত ঢালের মান সমান নয়। এইরূপ লেখচিত্রে কোনো বিন্দুর ঢাল নির্ণয় করতে হলে উক্ত বিন্দু সংলগ্ন এলাকায় অতি ক্ষুদ্র Δt এবং তৎসংলগ্ন Δx বিবেচনা করতে হবে। এই ঢাল ওই বিন্দুতে অন্তরক সহগের সমান তা দেখানো যায়।

এক্ষেত্রে ঢালের মান $= \frac{\Delta t^2}{\Delta x}$ বা, $\frac{d}{dx}(t^2) = 2t$ বুঝায়।

৩.১০ নং চিত্রে t^2 বনাম x লেখ অঙ্কন করা হয়েছে।



চিত্র ৩.১০

গাণিতিক উদাহরণ ৩.১

১। $s = \frac{1}{3}t^3 + 3t$ সূত্রানুসারে একটি বস্তু সরলরেখায় চলছে। 2 sec পর এর বেগ নির্ণয় কর।

মনে করি গতিবেগ $= v$

আমরা জানি, $v = \frac{ds}{dt}$

এখন $s = \frac{1}{3}t^3 + 3t$

এখানে,
সময়, $t = 2$ sec
বেগ, $v = ?$

s-কে t এর সাপেক্ষে ব্যবকলন করে পাই,

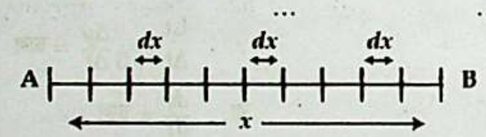
$$\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{3}t^3 + 3t\right) \quad \text{বা,} \quad v = \frac{1}{3} \times 3t^2 + 3 = t^2 + 3$$

$\therefore$ 2 sec পরের বেগ $v = (2)^2 + 3 = 7$ একক।

৩.৪.২ যোগজীকরণ বা সমাকলন
Integration

মনে করি একটি দণ্ডের দৈর্ঘ্য x; দণ্ডটিকে অসংখ্য সমান ও ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র অংশে বিভক্ত করা হলো। এরূপ একটি ক্ষুদ্র অংশের দৈর্ঘ্য $= dx$। ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র সকল অংশকে যোগ করলে সমগ্র দণ্ডের দৈর্ঘ্য x নির্ণয় করা যায়।

$$\therefore \quad \Sigma dx = x \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (3.8)$$



চিত্র ৩.১১

এখানে Σ চিহ্ন যোগজীকরণ বা সমষ্টিকরণ বুঝায়।
সমীকরণ (3.8) কে নিম্নলিখিত উপায়ে লেখা যায়

$$\int dx = x \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (3.9)$$

'$\int$' প্রতীকটি দ্বারাও যোগজীকরণ বা সমাকলন বুঝায়। এই সমীকরণ হতে দেখা যায় যে, dx এর সমাকলিত মান x এর সমান। তাহলে আমরা বলতে পারি সমাকলন এক ধরনের যোগজীকরণ। উপরের সমীকরণটির উভয় পাশে সমতা আনার জন্য উত্তর লেখার সময় একটি সমাকলন ধ্রুবক c যোগ করে লিখতে হয়, $\int dx = x + c$।

আবার মনে করি একটি ফাংশন $f(t)$ এর সমাকলিত মান, $\int f(t)dt = A(x)$

তাহলে $f(t)$ কে যোগজ রাশি বা integral রাশি বলে। $f(t)$ এর পর dt দ্বারা বুঝানো হয়েছে যে সমাকলনটি করতে হবে t এর সাপেক্ষে। একে variable বা চলরাশি বলে।

১. কয়েকটি ক্ষেত্রে যোগজীকরণের প্রয়োগ

- ভেক্টরের সাধারণ সমাকলন স্কেলার রাশির মতোই। মনে করি $\vec{A}(t) = \hat{i}\,A_x(t) + \hat{j}\,A_y(t) + \hat{k}\,A_z(t)$ ভেক্টরটি একটিমাত্র স্কেলার চলরাশি t-এর সমাকলন; তাহলে,

$$\int \vec{A}(t)\,dt = \hat{i}\int A_x(t)\,dt + \hat{j}\int A_y(t)dt + \hat{k}\int A_z(t)\,dt \text{ হবে।}$$

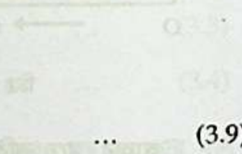
একে $\vec{A}(t)$-এর অনিশ্চিত সমাকলন (Indefinite integral) বলে।

- অনেক ক্ষেত্রে সমাকলন ব্যবকলনের বিপরীত প্রক্রিয়া যেমন—

$$\int \cos x\,dx = \sin x$$

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

অর্থাৎ $\sin x$ কে ব্যবকলন করলে $\cos x$ এবং $\cos x$ কে সমাকলন করলে $\sin x$ পাওয়া যায়।



চিত্র ৩.১২

- একটি আয়তক্ষেত্র অসংখ্য ফালির সমন্বয়ে গঠিত যার দৈর্ঘ্য x এবং প্রস্থ dy হলে [চিত্র ৩.১২] আয়তক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল হবে $\int xdy, = x\int dy = xy$

- যদি প্রস্থের সীমা উল্লেখ করে দেওয়া থাকে তাহলে ক্ষেত্রফল $= \int_0^y x\,dy = x\,[y]_0^y = x\,(y - 0) = xy$

২. বেগের ক্ষেত্রে সমাকলনের প্রয়োগ

গতিশীল বস্তুর বেগ নির্ণয় কালে সরণকে মোট সময় দ্বারা ভাগ করে বেগ নির্ণয় করে থাকি। কিন্তু এই বেগ গড়বেগ ছাড়া আর কিছুই নয়। কারণ চলার ক্ষেত্রে বস্তুর গতি কখনও সুষম, কখনও অসম হয়। তাই যদি চলমান পথকে ক্ষুদ্রতম অসংখ্য প্রস্থে বা অংশে বিভক্ত করে প্রতিটি ক্ষুদ্রতম অংশ (dx) এবং এই ক্ষুদ্রতম অংশ অতিক্রমের সময় (dt) দ্বারা ভাগ করি তাহলে ক্ষুদ্রতম অংশের জন্য বেগ নির্ণয় করতে পারি। এরপর এই ক্ষুদ্রতম প্রস্থের জন্য নির্ণেয় বেগ (dv) কে সমাকলন করলে সমগ্র পথের জন্য বস্তুর প্রকৃত বেগ নির্ণয় করতে পারি। সমাকলন পদ্ধতিতে নিচে ইহা দেখানো হলো :

dx অংশের বেগ, $dv = \dfrac{dx}{dt}$

আবার সমগ্র পথের জন্য বেগ $= \int dv = v + c$ ... ... (3.10)

যদি বেগের মান নির্দিষ্ট করা থাকে তাহলে উপরোক্ত সমাকলনটি ওই সীমার মধ্যে রেখে সমাধান করলে প্রকৃত বেগ জানা যায়। উদাহরণস্বরূপ বলা যায় বেগের মান $v = 0$ থেকে $v = v$ হলে (3.10) নং সমীকরণকে এই সীমার মধ্যে সমাকলন করলে মোট বেগ পাওয়া যায়।

এক্ষেত্রে মোট বেগ $= \int_0^v dv = [v]_0^v = (v - 0) = v$

সুতরাং বলা যায় ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র অংশের যোগফলই হলো মোট বা সমাকলন। একটি বাস্তব উদাহরণ দ্বারা বিষয়টি সম্বন্ধে ধারণা পাওয়া যায়। যেমন একজন মানুষ যখন টিভি স্টুডিওতে ক্যামেরার সামনে খবর পাঠ করে তখন তার ধারণকৃত ছবিটি অসংখ্য টুকরায় বিভক্ত করা হয়, আবার এটি যখন টিভির পর্দায় পৌঁছে তখন টুকরা টুকরা ছবিগুলো একত্রিত হয়ে পূর্ণাঙ্গ চিত্রে রূপ নেয়। এক্ষেত্রে স্টুডিওতে খণ্ড খণ্ড ছবিতে পরিণত হবার নাম ব্যবকলন আর টিভির পর্দায় খণ্ড খণ্ড চিত্র একত্রিত হওয়ার প্রক্রিয়াকে সমাকলন বা যোগজীকরণ বলে।

৩·৫ গতিবিষয়ক বিভিন্ন রাশি

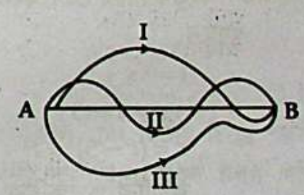
Different quantities related to motion

১. **সরণ (Displacement) : কোনো নির্দিষ্ট দিকে কোনো বস্তুর সময়ের সাথে অবস্থান পরিবর্তনকে বস্তুটির সরণ বলে।** সরণ একটি ভেক্টর রাশি। সুতরাং এর মান ও দিক উভয়ই আছে।

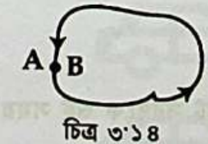
বস্তুর প্রাথমিক অবস্থান ও শেষ অবস্থান সংযোগকারী সরলরেখার দৈর্ঘ্য দ্বারা সরণ পরিমাপ করা হয়। বস্তুটির প্রাথমিক অবস্থান হতে শেষ অবস্থানের দিক সরণের দিক নির্দেশ করে [চিত্র ৩·১৩]। বস্তুর সরণ পথ-নিরপেক্ষ, কেবল প্রাথমিক ও শেষ অবস্থানের ওপর নির্ভর করে।

ব্যাখ্যা : চিত্র ৩·১৩-এ একটি বস্তুকণা তিনটি ভিন্ন পথে প্রাথমিক অবস্থান A থেকে শেষ অবস্থান B-তে পৌঁছানো দেখানো হয়েছে।

কণাটি প্রতি ক্ষেত্রে ভিন্ন পথে গেলেও প্রতিটি ক্ষেত্রে বস্তুটির সরণ = AB। সরলরেখার দৈর্ঘ্য এবং সরণের অভিমুখ A থেকে B-এর দিকে। অর্থাৎ কণাটির সরণ পথ-নিরপেক্ষ, শুধুমাত্র প্রাথমিক ও শেষ অবস্থানের ওপর নির্ভরশীল।



চিত্র ৩·১৩



চিত্র ৩·১৪

যদি বস্তুটির প্রাথমিক ও শেষ অবস্থান একই বিন্দু হয় তবে বস্তুটির সরণ শূন্য হবে [চিত্র ৩·১৪]।

সরণের একক ও মাত্রা : S. I. পদ্ধতিতে সরণের একক মিটার (m)। সরণের মাত্রা হলো (L)।

উদাহরণ : একটি বস্তু পূর্বদিকে 4 m অতিক্রম করার পর উত্তরদিকে 3 m গেল। বস্তুটির সরণের মান ও দিক নির্ণয় কর।

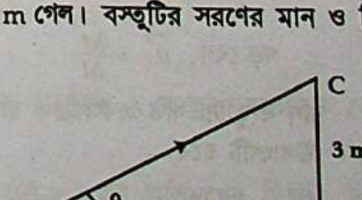
বস্তুটির পূর্ব দিকের সরণ, AB = 4 m

এবং উত্তর দিকে সরণ, BC = 3 m

বস্তুটির প্রাথমিক অবস্থান A ও শেষ অবস্থান C হওয়ায় এর সরণ,

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{(4)^2 + (3)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5\ \text{m}$$

বস্তুটির অভিমুখ A হতে C এর দিকে।



চিত্র ৩·১৫

ধরি $\overrightarrow{AC}$ অভিমুখ AB এর সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে।

$\therefore \quad \tan\theta = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{4} = 0.75 = \tan 36.9°$

$\therefore \quad \theta = 36.9°$

সুতরাং, বস্তুটির সরণের অভিমুখ হলো পূর্বদিকের সাথে 36.9° কোণ করে উত্তর দিকে।

২. দ্রুতি (Speed) : কোনো গতিশীল বস্তু একক সময়ে যে দূরত্ব অতিক্রম করে তাকে ওই বস্তুর দ্রুতি বলে।

যদি একটি বস্তুকণা t সময়ে s দূরত্ব অতিক্রম করে, তবে বস্তুকণাটির দ্রুতি, $u = \frac{s}{t}$।

দ্রুতি একটি স্কেলার রাশি। এর মান আছে, কিন্তু অভিমুখ নেই।

দ্রুতির একক ও মাত্রা : S. I. পদ্ধতিতে দ্রুতির একক মিটার/সেকেন্ড (ms^{-1})। এর মাত্রা $= \frac{[L]}{[T]} = [LT^{-1}]$

৩. গড় দ্রুতি (Average speed) : কোনো বস্তু কর্তৃক অতিক্রান্ত মোট দূরত্ব এবং মোট ব্যয়িত সময়ের ভাগফলকে গড় দ্রুতি বলে।

ব্যাখ্যা : মনে করি একটি গতিশীল বস্তু মোট সময় t-এ মোট দূরত্ব s অতিক্রম করল।

$$\therefore \quad \text{গড় দ্রুতি, } \bar{v} = \frac{\text{মোট অতিক্রান্ত দূরত্ব}}{\text{মোট ব্যয়িত সময়}} = \frac{s}{t}$$

কোনো বস্তু যদি প্রতি একক সময়ে সমান দূরত্ব অতিক্রম করে অর্থাৎ বস্তুটি সমদ্রুতিতে গতিশীল হয়, তবে ওই বস্তুর দ্রুতি ও গড় দ্রুতি একই হয়।

৪. তাৎক্ষণিক দ্রুতি (Instantaneous speed) : সময় ব্যবধান শূন্যের কাছাকাছি হলে সময়ের সঙ্গে বস্তুর দূরত্বের পরিবর্তনের হারকে তাৎক্ষণিক দ্রুতি বা দ্রুতি বলে। ক্যালকুলাসের নিয়ম অনুসারে কোনো গতিশীল বস্তু Δt সময়ে Δs দূরত্ব অতিক্রম করলে এর তাৎক্ষণিক দ্রুতি হবে,

$$v = \underset{\Delta t \to 0}{\text{Lt}} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

বস্তুটি সমদ্রুতিতে গতিশীল হলে প্রতিটি মুহূর্তে বস্তুটির তাৎক্ষণিক দ্রুতি সমান হয়।

উদাহরণ : একটি বস্তুকণার ওপর স্থির বল ক্রিয়া করায় কণাটির সরণ ও সময় $t = \sqrt{x} + 5$ সমীকরণ দ্বারা সম্পর্কিত। বস্তুকণাটির বেগ যখন শূন্য তখন কণাটির সরণ কত ? (সরণ এবং দূরত্ব এস আই এককে প্রকাশিত)

এখানে,

$t = \sqrt{x} + 5$

$\sqrt{x} = t - 5$

$\therefore \quad x = (t-5)^2 = t^2 + 25 - 10t$

$\therefore \quad$ কণাটির তাৎক্ষণিক বেগ, $v = = \frac{dx}{dt} = 2t - 10$

এখন, কণাটির বেগ শূন্য হবে, যখন $2t - 10 = 0$

$\therefore \quad t = \frac{10}{2} = 5$ সেকেন্ড

৫. গড় বেগ (Average velocity) : যে কোনো সময় ব্যবধানে কোনো বস্তুর মোট সরণকে ওই সময় ব্যবধান দিয়ে ভাগ করলে যে রাশি পাওয়া যায় তাকেই বস্তুটির গড় বেগ বলে।

ব্যাখ্যা : মনে করি Δt সময় ব্যবধানে একটি বস্তুর মোট সরণ $\Delta\vec{r}$

$\therefore$ গড় বেগ, $\overrightarrow{\bar{v}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$

যদি বস্তুটির গতি একমাত্রিক হয় এবং বস্তুটি X-অক্ষ বরাবর গতিশীল হয়, সেক্ষেত্রে বেগের একটিমাত্র উপাংশ থাকে। উপাংশটি হবে—

$\overrightarrow{\bar{v}_x} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\hat{i}$ [∵ একমাত্রিক কাঠামোতে $\vec{r} = x\hat{i}$]

এবং গড় বেগের মান $\overline{v_x} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$

৬. তাৎক্ষণিক বেগ বা বেগ (Instantaneous velocity or velocity) : সময়ের ব্যবধান শূন্যের কাছাকাছি হলে বস্তুর সরণের হারকে তাৎক্ষণিক বেগ বা সংক্ষেপে বেগ বলা হয়। তাৎক্ষণিক বেগ বলতে কোনো বস্তুর বিশেষ মুহূর্তের বেগ বুঝায়। কোনো বস্তুর তাৎক্ষণিক বেগ নির্ণয় করতে হলে যে মুহূর্তের বেগ নির্ণয় করতে হবে ঠিক তার পূর্ববর্তী এবং পরবর্তী মুহূর্তে বস্তুটির অবস্থান জানা প্রয়োজন। পূর্ববর্তী এবং পরবর্তী মুহূর্ত বা সময়ের ব্যবধান অবশ্যই অত্যন্ত ক্ষুদ্র হতে হবে (প্রায় শূন্যের কাছাকাছি)।

অর্থাৎ সময়ের মান শূন্যের কাছাকাছি হলে উক্ত সময়ে সরণের পরিবর্তনের হারকে তাৎক্ষণিক বেগ বলে।

সুতরাং তাৎক্ষণিক একমাত্রিক বেগ $\vec{v}_x = \underset{\Delta t \to 0}{\mathrm{Lt}} \dfrac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \dfrac{d\vec{x}}{dt}$

উপরের আলোচনা থেকে তাৎক্ষণিক বেগ বা বেগের নিম্নোক্ত সংজ্ঞা দেয়া যায় :

সময় ব্যবধান শূন্যের কাছাকাছি হলে গড় বেগের সীমান্তিক মানকেই তাৎক্ষণিক বেগ বা সংক্ষেপে বেগ বলে।

৭. মধ্য বেগ (Mean velocity) : কোনো একটি গতিশীল বস্তুর আদি বেগ এবং শেষ বেগ-এর অভিমুখ একই হলে তাদের যোগফলের অর্ধেককে মধ্য বেগ বলে।

মনে করি, কোনো নির্দিষ্ট দিকে একটি বস্তুর আদি বা প্রথম বেগ $\vec{v}_0$ এবং শেষ বেগ $\vec{v}$.

$$\therefore \text{ মধ্য বেগ } = \frac{\vec{v}_0 + \vec{v}}{2}$$

৮. আপেক্ষিক বেগ (Relative velocity) : সাধারণত 'কোনো বস্তুর বেগ' বলতে আমরা পৃথিবীর ওপর কোনো স্থির বস্তুর সাপেক্ষে এর বেগ বুঝি। আবার আমরা একটি বস্তু A-এর বেগ পৃথিবীর উপর সচল আরেকটি বস্তু B-এর সাপেক্ষেও নির্ণয় করতে পারি। একে B বস্তুর সাপেক্ষে A বস্তুর আপেক্ষিক বেগ বলে। অর্থাৎ **দুটি চলমান বস্তুর একটির সাপেক্ষে অপরটির অবস্থানের পরিবর্তনের হারকে আপেক্ষিক বেগ বলে।** এক্ষেত্রে কোনো বস্তু সাপেক্ষে আরেকটি বস্তুর আপেক্ষিক বেগ হবে বেগদ্বয়ের ভেক্টর বিয়োগফলের সমান; অর্থাৎ পৃথিবী পৃষ্ঠের উপর সচল কোনো বস্তু সাপেক্ষে আরেকটি বস্তুর আপেক্ষিক বেগ বস্তু দুটির বেগের ভেক্টর বিয়োগফলের সমান।

মনে কর A ও B দুটি বস্তুর বেগ যথাক্রমে v_A এবং v_B হলে B সাপেক্ষে A-এর আপেক্ষিক বেগ

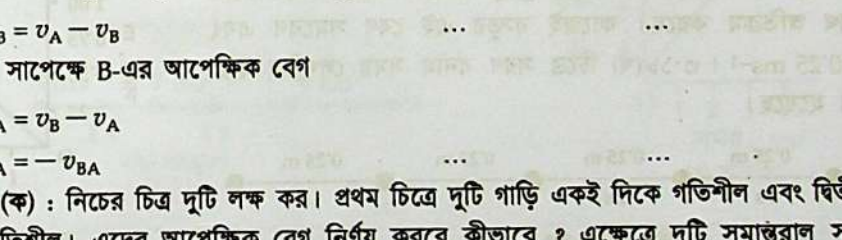
$$v_{AB} = v_A - v_B \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3.11)$$

আবার A সাপেক্ষে B-এর আপেক্ষিক বেগ

$$v_{BA} = v_B - v_A$$

$$\therefore \quad v_{BA} = -v_{BA} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3.12)$$

উদাহরণ (ক) : নিচের চিত্র দুটি লক্ষ কর। প্রথম চিত্রে দুটি গাড়ি একই দিকে গতিশীল এবং দ্বিতীয় চিত্রে পরস্পর বিপরীত দিকে গতিশীল। এদের আপেক্ষিক বেগ নির্ণয় করবে কীভাবে ? এক্ষেত্রে দুটি সমান্তরাল সরল চলন গতির ক্ষেত্রে আপেক্ষিক বেগ নির্ণয়ে নিম্নের দুটি গতি বিবেচনা করতে হবে।



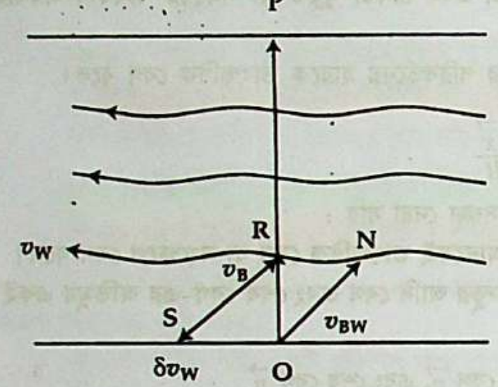
(ক) (খ)

চিত্র ৩.১৬

● **সমমুখি গতি :** দুটি বস্তু সরলরেখা বরাবর একই দিকে চললে B বস্তু সাপেক্ষে A বস্তুর আপেক্ষিক বেগের মান বস্তুদ্বয়ের বেগের মানের বিয়োগফলের সমান হয়।

অর্থাৎ $v_{AB} = v_A - v_B$, যদি $v_A > v_B$ হয়, তবে v_{AB} এর অভিমুখ হবে v_A এর অভিমুখের দিকে। সুতরাং B থেকে দেখলে A বস্তুকে সামনের দিকে v_{AB} বেগে এগোতে দেখা যাবে। আবার A থেকে দেখলে B বস্তুকে v_{BA} $(= -v_{AB})$ বেগে পেছনের দিকে যেতে দেখা যাবে। কারণ v_{BA} এর অভিমুখ v_{AB} এর বিপরীতমুখি।

● **বিপরীতমুখি গতি :** দুটি বস্তু সরলরেখা বরাবর বিপরীত দিকে চলতে থাকলে যদি A বস্তুর বেগ v_A কে ধনাত্মক ধরা হয়, তাহলে B বস্তুর বেগ v_B কে ঋণাত্মক ধরতে হবে। এখানে B সাপেক্ষে A বস্তুর আপেক্ষিক বেগ হবে, $v_{AB} = v_A - (-v_B) = v_A + v_B$, যদি $v_A > v_B$ হয়।



চিত্র ৩.১৭

সুতরাং B বস্তু থেকে দেখলে A বস্তু v_{AB} বেগে B বস্তুর দিকে এগোচ্ছে বা দূরে চলে যাচ্ছে বলে মনে হবে। যেহেতু $v_{BA} = -v_B - v_A = -(v_B + v_A)$, অতএব A বস্তু থেকে দেখলে মনে হবে যে, B বস্তুটি $v_{BA}\ (= -v_{AB})$ বেগে A বস্তুর দিকে এগোচ্ছে বা দূরে সরে যাচ্ছে।

উদাহরণ (খ) : মনে কর এক ব্যক্তি নৌকা করে এপারের কোনো বিন্দু O থেকে নদীর ওপারে ঠিক বিপরীতে অবস্থিত P বিন্দুতে সরাসরি যেতে চায়; তাহলে তাকে ON অভিমুখে নৌকা চালাতে হবে [চিত্র ৩.১৭]।

যদি স্রোত সাপেক্ষে নৌকাটির আপেক্ষিক বেগ v_{BW} এবং স্রোতের বেগ v_W হয়, তবে এদের ভেক্টর যোগফল নৌকাটির বেগ v_B কে প্রকাশ করে, অর্থাৎ $\vec{v}_B = \vec{v}_W + \vec{v}_{BW}$.

সিদ্ধান্ত : উপরের উদাহরণ থেকে এ সিদ্ধান্ত নেয়া যায় :

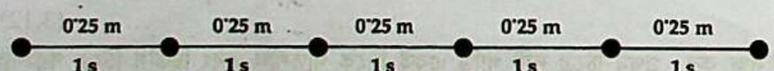
(১) দুটি গতিশীল বস্তু একই দিকে চললে বস্তু দুটির বেগ বিয়োগ করে আপেক্ষিক বেগ পাওয়া যায়।

(২) দুটি গতিশীল বস্তু বিপরীত দিকে চললে আপেক্ষিক বেগ বের করতে বেগ দুটি যোগ করতে হয়।

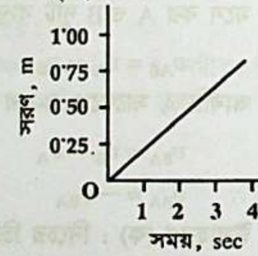
৯. সমবেগ (Uniform velocity) : কোনো বস্তুর ওপর ক্রিয়াশীল বলের মান ও দিক ধ্রুব থাকলে, ওই বস্তুর বেগও ধ্রুব থাকে। বস্তুর এই ধ্রুব বেগকে সমবেগ বলে।

উদাহরণ : শব্দের বেগ, আলোর বেগ ইত্যাদি।

ব্যাখ্যা : ৩.১৮ (ক) চিত্রে পাঁচটি বিন্দু দ্বারা 1 সেকেন্ড পর পর কোনো একটি সরলরেখা বরাবর একই দিকে গতিশীল একটি বস্তুর অবস্থান প্রকাশ করা হয়েছে। এখানে পর পর দুটি বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব 0.25m। গতি অনুসারে বস্তুটি একই অভিমুখে প্রতি সেকেন্ড 0.25m দূরত্ব অতিক্রম করছে এবং সমান সময়ে সমান পথ অতিক্রম করছে। কাজেই বস্তুর এই বেগ সমবেগ এবং সমবেগের মান 0.25 ms^{-1}। ৩.১৮(খ) চিত্রে সরণ বনাম সময় লেখচিত্র দ্বারা সমবেগ দেখানো হয়েছে।



চিত্র ৩.১৮ (ক)

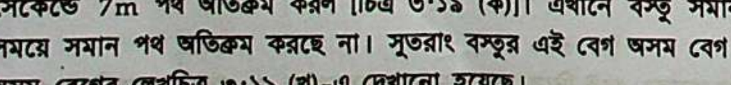


চিত্র ৩.১৮ (খ)

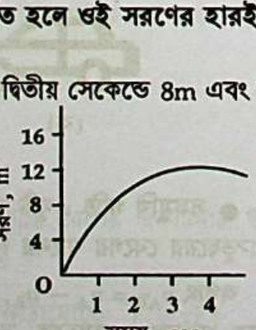
একটি বস্তুর সমবেগ 5 ms^{-1}। উক্তিটির অর্থ বস্তুটি একটি নির্দিষ্ট দিকে প্রতি সেকেন্ডে 5m দূরত্ব অতিক্রম করে চলছে।

১০. অসম বেগ (Variable velocity) : যদি ভিন্ন ভিন্ন সময়ে বস্তুর বেগ ভিন্ন ভিন্ন হয় তবে তাকে অসম বেগ বলে। কাজেই সময়ের সাথে সরণের হারের মান অথবা দিক অথবা উভয়েই পরিবর্তিত হলে ওই সরণের হারই অসম বেগ।

ব্যাখ্যা : ধরি, একটি গতিশীল বস্তু কোনো একটি দিকে প্রথম সেকেন্ডে 5m, দ্বিতীয় সেকেন্ডে 8m এবং তৃতীয় সেকেন্ডে 7m পথ অতিক্রম করল [চিত্র ৩.১৯ (ক)]। এখানে বস্তু সমান সময়ে সমান পথ অতিক্রম করছে না। সুতরাং বস্তুর এই বেগ অসম বেগ। অসম বেগের লেখচিত্র ৩.১৯ (খ)-এ দেখানো হয়েছে।



চিত্র ৩.১৯ (ক)



চিত্র ৩.১৯ (খ)

১১. তাৎক্ষণিক ত্বরণ বা ত্বরণ (Instantaneous acceleration or acceleration) : কোনো একটি গতিশীল বস্তুর সময় ব্যবধান শূন্যের কাছাকাছি হলে বেগ পরিবর্তনের হারকে তাৎক্ষণিক ত্বরণ বা সংক্ষেপে ত্বরণ বলে।

ব্যাখ্যা : ধরা যাক, অত্যন্ত অল্প সময়ে Δt-এ কোনো বস্তুর বেগ পরিবর্তন $\Delta\vec{v}$ হয়। বস্তুটির বেগের পরিবর্তন যে খুবই স্বল্প সময়ে ঘটেছে তা দিয়ে ভাগ করলে তাৎক্ষণিক ত্বরণ পাওয়া যায়।

অতএব, তাৎক্ষণিক ত্বরণ, $\vec{a} = \underset{\Delta t \to 0}{\mathrm{Lt}} \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$

সুতরাং, তাৎক্ষণিক ত্বরণকে নিম্নলিখিত উপায়ে সংজ্ঞায়িত করা হয় :
সময় ব্যবধান শূন্যের কাছাকাছি হলে, গড় ত্বরণের সীমান্তিক মান ত্বরণের সমান।

ত্বরণের মান হবে, $a = \left|\dfrac{d\vec{v}}{dt}\right|$

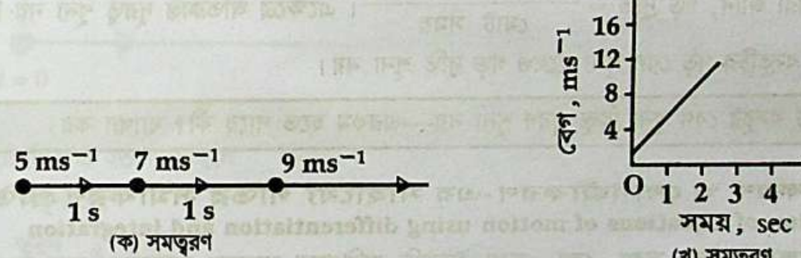
উল্লেখ্য, কোনো বিন্দুতে তাৎক্ষণিক ত্বরণ ওই বিন্দুতে বস্তুটির বেগের লম্ব বরাবর হবে।

ত্বরণ দুই প্রকার; যথা—(ক) সমত্বরণ (uniform acceleration) ও (খ) অসমত্বরণ (variable acceleration)।

(ক) সমত্বরণ : ত্বরণ যদি সব সময় ধ্রুব হয় তবে তাকে সমত্বরণ বলে। অভিকর্ষের টানে মুক্তভাবে পড়ন্ত বস্তুর ত্বরণ সমত্বরণ। সমত্বরণশীল বস্তুতে সমবল ক্রিয়া করে। সমত্বরণে ত্বরণের মান ও দিক উভয়ই ধ্রুব থাকে।

৩·২০ (ক) চিত্রে একটি সরলরেখা বরাবর বস্তুর পর পর সেকেন্ডের বেগ দেখিয়ে তার ত্বরণের প্রকৃতি নির্দেশ করা হয়েছে। ৩·২০ (খ) চিত্রে লেখচিত্রের সাহায্যে সমত্বরণ দেখানো হয়েছে। এখানে সমত্বরণের মান $2\ \mathrm{ms^{-2}}$। সমত্বরণের ক্ষেত্রে লেখচিত্র সরলরেখা এবং ঢাল সর্বত্র সমান হয়।

একটি বস্তুর সমত্বরণ $10\ \mathrm{ms^{-2}}$ এই উক্তি দ্বারা বুঝা যায় যে, একই দিকে বস্তুর বেগ প্রতি সেকেন্ডেই $10\ \mathrm{ms^{-1}}$ বৃদ্ধি পাচ্ছে।

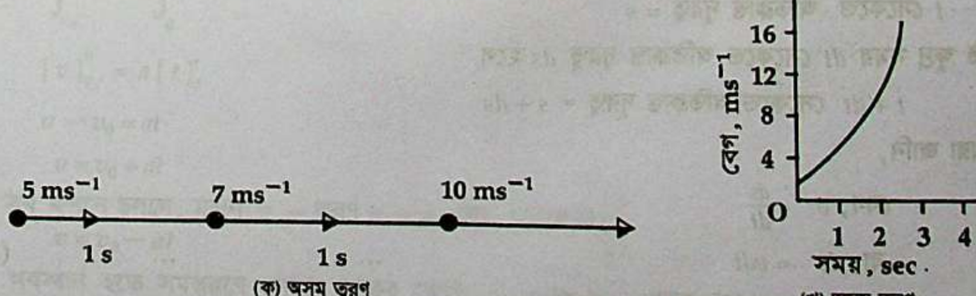


চিত্র ৩·২০

কাজ : সমদ্রুতিতে চলমান কোনো বস্তুর ত্বরণ থাকা কী সম্ভব ? উত্তরের সপক্ষে যুক্তি দাও।

সমদ্রুতিতে চলমান বস্তুর ত্বরণ থাকা সম্ভব। একটি বস্তু যদি সম বৃত্তাকার পথে সমদ্রুতিতে পরিধি বরাবর আবর্তিত হয় তবে বস্তুটির ওপর কেন্দ্রাভিমুখি অভিকেন্দ্র ত্বরণ ক্রিয়াশীল হয়।

(খ) অসম ত্বরণ : সময়ের সাথে যখন ত্বরণ ভিন্ন ভিন্ন হয় তখন তাকে অসম ত্বরণ বলে। ত্বরণের মান ও দিক, কিংবা মান অথবা দিক পরিবর্তনের জন্য অসম ত্বরণ সৃষ্টি হতে পারে। বাস, ট্রেন, মোটরগাড়ি ইত্যাদির ত্বরণ অসম ত্বরণের উদাহরণ। এক কথায় গতিশীল প্রায় বস্তুর ত্বরণই অসম ত্বরণ।



চিত্র ৩·২১

৩.২১ (ক) ও (খ) চিত্রে যথাক্রমে সরলরেখা ও লেখচিত্র দ্বারা অসম ত্বরণ দেখানো হয়েছে। লেখচিত্রের বিভিন্ন বিন্দুতে ঢাল ভিন্ন ভিন্ন হয়।

গাণিতিক উদাহরণ ৩.২

১। এক ব্যক্তি গড়ে 24 $kmhr^{-1}$ বেগে গন্তব্যস্থানের অর্ধেক পথ অতিক্রম করে। বাকি পথ কত বেগে চললে ওই ব্যক্তি সম্পূর্ণ পথ 32 $kmhr^{-1}$ গড় গতিবেগে অতিক্রম করবে ?

ধরা যাক, ওই ব্যক্তি মোট $2x$ km পথ অতিক্রম করে।

প্রশ্নানুসারে, প্রথম x km যেতে সময় লাগে $\frac{x}{24}$ hr। সমগ্র পথ 32 $kmhr^{-1}$ গড় বেগে অতিক্রম করলে মোট সময় লাগে,

$$\frac{2x}{32}\text{ hr} = \frac{x}{16}\text{ hr}$$

∴ শেষ অর্ধেক যেতে সময় নেয় $\left(\frac{x}{16}-\frac{x}{24}\right) = \frac{x}{48}$ hr

∴ দ্বিতীয় অর্ধেক ওই ব্যক্তির গতিবেগ হবে, $\frac{x}{x/48} = 48\ kmhr^{-1}$

কাজ : একটি বস্তুর গড় বেগ শূন্য কিন্তু ওই বস্তুর গড় দ্রুতি শূন্য নাও হতে পারে কী? ব্যাখ্যা কর।

বস্তুটি যদি একটি বিন্দু থেকে যাত্রা শুরু করে আবার ওই বিন্দুতে ফিরে আসে, তবে তার সরণ শূন্য হয়। এখন, গড় বেগ = $\frac{\text{মোট সরণ}}{\text{মোট সময়}}$। এক্ষেত্রে যেহেতু মোট সরণ শূন্য, তাই গড় বেগ শূন্য হবে।

আবার আমরা জানি, গড় দ্রুতি = $\frac{\text{মোট অতিক্রান্ত দূরত্ব}}{\text{মোট সময়}}$। এক্ষেত্রে অতিক্রান্ত দূরত্ব শূন্য নয় বিধায় গড় দ্রুতি শূন্য হবে না। সুতরাং, বস্তুটির গড় বেগ শূন্য হলেও গড় দ্রুতি শূন্য নয়।

নিজে কর : একটি বস্তুর বেগ শূন্য কিন্তু ত্বরণ শূন্য নয়—এরকম হতে পারে কী? ব্যাখ্যা কর।

৩.৬ অন্তরীকরণ ও যোগজীকরণ-এর সাহায্যে গতির সমীকরণ প্রতিপাদন

Derivation of Equations of motion using differentiation and integration

পূর্বের অনুচ্ছেদে দূরত্ব, সরণ, বেগ, ত্বরণ ইত্যাদি রাশিগুলো সম্বন্ধে আলোচনা করা হয়েছে। এই রাশিগুলো পরস্পর সম্পর্কযুক্ত। এগুলোকে কয়েকটি সমীকরণের সাহায্যে প্রকাশ করা হয়। এই সমীকরণগুলোকে গতির সমীকরণ বলে। অন্তরীকরণ ও যোগজীকরণ ব্যবহার করে এ সমীকরণগুলো নিম্নে প্রতিপাদন করা হলো :

(ক) সমবেগে গতিশীল বস্তুর দূরত্বের সমীকরণ ($s = vt$ বা, $x = x_0 + v_x t$)

মনে করি একটি বস্তু নির্দিষ্ট দিকে সমবেগে গতিশীল।

ধরি, বস্তুটির সমবেগ = v

আদি সরণ = 0

t সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব = s

অতি ক্ষুদ্র সময় dt সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব ds হলে

$t + dt$ সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব = $s + ds$

আমরা জানি,

বেগ, $v = \frac{ds}{dt}$

বা, $ds = vdt$ … … (3.13)

যখন $t = 0$, তখন $s = 0$ এবং যখন $t = t$, তখন $s = s$

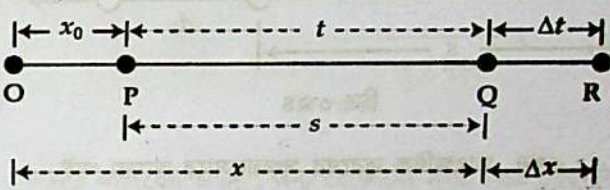
সমীকরণ (3.13)-কে উল্লিখিত সীমার মধ্যে সমাকলন করে পাওয়া যায়

$$\int_0^s ds = \int_0^t v dt$$

বা, $\int_0^s ds = v \int_0^t dt$ [$\because v$ ধ্রুবক]

বা, $s = v \times t$ ... ... (3.14)

যদি বস্তুটি X-অক্ষের দিকে গতিশীল হয় এবং গতির শুরুতে অর্থাৎ যখন $t = 0$, তখন $s = x_0$ এবং যখন $t = t$, তখন $s = x$ এবং বেগ, $v = v_x$ হয় [চিত্র ৩.২২], তবে সমীকরণ (3.13)-কে উপরোক্ত সীমার মধ্যে সমাকলন করে পাই,



চিত্র ৩.২২

$$\int_{x_0}^{x} ds = v_x \int_0^t dt$$

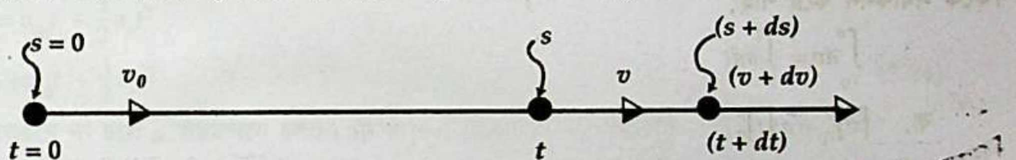
বা, $[s]_{x_0}^{x} = v_x [t]_0^t$

বা, $x - x_0 = v_y t$

বা, $x = x_0 + v_x t$ ... ... (3.15)

(খ) সমত্বরণে গতিশীল বস্তুর শেষ বেগের সমীকরণ ($v = v_0 + at$ বা $v_x = v_{x0} + a_x t$)

মনে করি কোনো একটি দিকে v_0 আদি বেগসহ a সমত্বরণে গতিশীল বস্তুর বেগ অতি অল্প dt সময়ে v হতে



চিত্র ৩.২৩

বৃদ্ধি পেয়ে $v + dv$ হয় [চিত্র ৩.২৩]। তাহলে

ত্বরণের সংজ্ঞা অনুসারে,

ত্বরণ $a = \dfrac{dv}{dt}$

বা, $dv = a dt$ ... ... (3.16)

যখন $t = 0$, তখন $v = v_0$ এবং যখন $t = t$, তখন $v = v$। এই সীমার মধ্যে সমীকরণ (3.16)-এর উভয় পক্ষকে সমাকলন করে পাই,

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t a dt$$

বা, $\int_{v_0}^{v} dv = a \int_0^t dt$

বা, $[v]_{v_0}^{v} = a [t]_0^t$

বা, $v - v_0 = at$

বা, $v = v_0 + at$ ... ... (3.17)

বস্তু সম মন্দনে চললে, মন্দন = $-$ ত্বরণ = $-a$ এবং সেক্ষেত্রে

$v = v_0 - at$ ... ... (3.18)

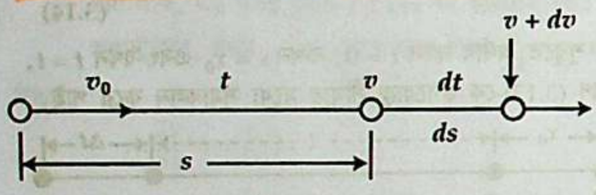
স্থির অবস্থান হতে সমত্বরণে চলমান বস্তুর ক্ষেত্রে $v_0 = 0$, $a =$ ধ্রুবক হয়। সেক্ষেত্রে $v =$ ধ্রুবক $\times t$ বা $v \propto t$ হয়। অর্থাৎ স্থির অবস্থান হতে সমত্বরণে চলমান বস্তুর ক্ষেত্রে বেগ সময়ের সমানুপাতিক।

বি. দ্র. X অক্ষ বরাবর গতিশীল বস্তুর ক্ষেত্রে আদিবেগ v_{x0}, শেষ বেগ v_x এবং ত্বরণ a_x ধরলে সমীকরণ (3.17) পরিবর্তিত হবে।

$$v_x = v_{x0} + a_x t \qquad \ldots \qquad (3.19)$$

অনুরূপভাবে, সমীকরণ (3.18) পরিবর্তিত হবে। Y বা Z অক্ষ বরাবর গতির ক্ষেত্রে x-এর স্থলে যথাক্রমে y বা z ব্যবহার করতে হবে।

(গ) সমত্বরণে বস্তুর অতিক্রান্ত দূরত্বের সমীকরণ ($s = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$ বা, $x = x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2} a_x t^2$)



চিত্র ৩·২৪

মনে করি, একটি বস্তুকণা v_0 আদি বেগসহ a সমত্বরণে কোনো নির্দিষ্ট দিকে গতিশীল।

বস্তুকণাটি t সময়ে s দূরত্ব অতিক্রম করে v বেগ প্রাপ্ত হয় এবং একই দিকে আরো অতি ক্ষুদ্র সময় dt পরে ds দূরত্ব অতিক্রমের পর $v + dv$ বেগ প্রাপ্ত হয় [চিত্র ৩·২৪]।

এখন, তাৎক্ষণিক ত্বরণের সংজ্ঞানুসারে আমরা পাই,

$$a = \frac{dv}{dt}$$

বা, $dv = adt \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (3.20)$

যখন $t = 0$, তখন বেগ $v = v_0$ এবং যখন $t = t$, তখন বেগ $v = v$। এই সীমার মধ্যে সমীকরণ (3.20)-এর উভয় পক্ষকে সমাকলন করে পাই,

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t adt$$

বা, $[v]_{v_0}^{v} = a\,[t]_0^t$

বা, $v - v_0 = a(t - 0)$

বা, $v = v_0 + at \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (3.21)$

আবার, তাৎক্ষণিক বেগের সংজ্ঞানুসারে,

$$v = \frac{ds}{dt}$$

বা, $ds = vdt$

বা, $ds = (v_0 + at)dt$ [সমীকরণ (3.21)-এর সাহায্যে]

বা, $ds = v_0 dt + atdt \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (3.22)$

আবার, যখন সময়, $t = 0$ অর্থাৎ গণনার শুরুতে $s = 0$ এবং t সময় পরে $s = s$; এই সীমার মধ্যে সমীকরণ (3.22)-এর উভয় পক্ষকে সমাকলন করে পাই,

$$\int_0^s ds = \int_v^t v_0 dt + \int_v^t atdt$$

বা, $\int_0^s ds = v_0 \int_v^t dt + a\int_v^t tdt$

বা, $[s]_0^s = v_0\,[t]_0^t + a\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^t$

বা, $(s - 0) = v_0 (t - 0) + a\left(\frac{t^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right)$

বা, $s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (3.23)$

আবার, বস্তুটি স্থির অবস্থান হতে সমত্বরণে গতিশীল হলে, আমরা পাই,

$$s = 0 \times t + \frac{1}{2}at^2$$

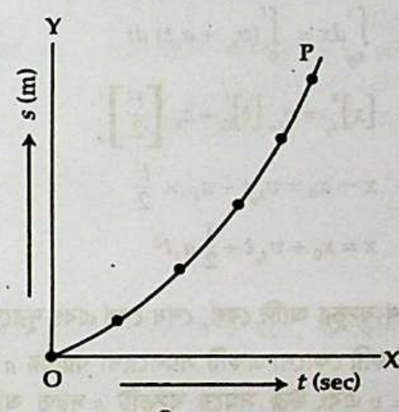
বা, $s = 0 + \frac{1}{2}at^2$

বা, $s = \frac{1}{2}at^2$

বা, $s = \text{ধ্রুবক} \times t^2 \quad \left[\because \frac{1}{2}a = \text{ধ্রুবক}\right]$

বা, $s \propto t^2$

অর্থাৎ স্থির অবস্থান হতে সম-ত্বরণে চলমান বস্তুর অতিক্রান্ত দূরত্ব সময়ের বর্গের সমানুপাতিক।



চিত্র ৩.২৫

চিত্র ৩.২৫-এ সময়ের সঙ্গে সরণের লেখচিত্র দেখানো হয়েছে।

যদি বস্তুটি X অক্ষ বরাবর গতিশীল হয় এবং $t = 0$ সময়ে আদিবেগ $= v_{x_0}$, অন্য যেকোনো সময় t-তে শেষ বেগ $= v$ ও সমত্বরণ a_x ধরা হলে সমীকরণ (3.23) লেখা যায়, $s = v_{x_0}t + \frac{1}{2}a_x t^2$

এখন $t = 0$ সময়ে বস্তুটির আদি অবস্থান x_0 এবং t সময়ে এর অবস্থান x হলে, $s = x - x_0$ হবে।

সেক্ষেত্রে

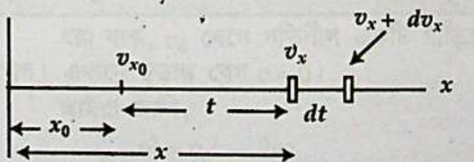
$$s = x - x_0 = v_{x_0}t + \frac{1}{2}a_x t^2$$

বা, $x = x_0 + v_{x_0}t + \frac{1}{2}a_x t^2$ ... ... (3.24)

বস্তু a সমত্বরণে না চলে a সমমন্দনে চললে, মন্দন = – ত্বরণ = $-a$ সমীকরণ (3.24) হতে পাই,

$s = v_0 t - \frac{1}{2}at^2$ ... ... (3.25)

মনে করি, একটি বস্তু X-অক্ষ বরাবর a_x সমত্বরণে গতিশীল এবং গণনার শুরুতে অর্থাৎ যখন $t = 0$ তখন বস্তুটির আদি অবস্থান $= x_0$, বেগ $= v_{x_0}$ এবং t সময় পরে অবস্থান $= x$, বেগ $= v_x$; এখন বস্তুটি একই দিকে আরও ক্ষুদ্র সময় dt পরে dx দূরত্ব অতিক্রম করে $v_x + dv_x$ বেগ প্রাপ্ত হলে, তাৎক্ষণিক ত্বরণের সংজ্ঞানুসারে আমরা পাই,



চিত্র ৩.২৬

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}$$

বা, $dv_x = a_x dt$ ... ... (3.26)

সমীকরণ (3.26)-কে যথাযথ সীমা তথা $t = 0$ ও $t = t$ এবং v_{x_0} ও v_x সীমার মধ্যে সমাকলন করে পাই,

$$\int_{v_{x_0}}^{v_x} dv_x = \int_0^t a_x dt$$

বা, $[v_x]_{v_{x_0}}^{v_x} = a_x [t]_0^t$

বা, $v_x - v_{x_0} = a_x (t - 0)$

বা, $v_x = v_{x_0} + a_x t$ ... ... (3.27)

আবার, তাৎক্ষণিক বেগের সংজ্ঞানুসারে পাই,

$$v_x = \frac{dx}{dt}$$

বা, $dx = v_x dt$ বা, $dx = (v_{x_0} + a_x t)\, dt$ ... ... (3.28) [সমীকরণ (3.27) এর সাহায্যে]

সমীকরণ (3.28) এর উভয় পক্ষকে x_0 ও x এবং $t = 0$ ও t সীমার মধ্যে সমাকলন করে পাই,

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t (v_{x_0} + a_x t)\, dt$$

বা, $$[x]_{x_0}^{x} = v_{x_0}[t]_0^t + a_x \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^t$$

বা, $$x - x_0 = v_{x_0} t + a_x \times \frac{t^2}{2}$$

বা, $$x = x_0 + v_{x_0} t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

(ঘ) সমত্বরণে বস্তুর আদি বেগ, শেষ বেগ এবং দূরত্বের মধ্যে সম্পর্ক ($v^2 = v_0^2 + 2as$ বা, $v_x^2 = v_{x0}^2 + 2a(x - x_0)$)

মনে করি কোনো একটি সরলরেখা বরাবর a সমত্বরণে গতিশীল একটি বস্তুর আদি বেগ $= v_0$; t সময় পরে তার শেষ বেগ $= v$ এবং উক্ত সময়ে বস্তুটি s দূরত্ব অতিক্রম করে। v, v_0, a ও s-এর সম্পর্কজনিত সমীকরণ প্রতিপাদন করতে হবে।

তাৎক্ষণিক ত্বরণের সংজ্ঞানুসারে,

$$a = \frac{dv}{dt}$$

বা, $$a = \frac{dv}{ds} \times \frac{ds}{dt}$$

বা, $$a = \frac{dv}{ds} \times v$$

বা, $$ads = v \times dv \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (3.29)$$

যখন $s = 0$, তখন $v = v_0$ এবং যখন $s = s$, তখন $v = v$; এই সীমার মধ্যে সমীকরণ (3.29)-এর উভয় পক্ষকে সমাকলন করে পাই,

$$\int_0^s ads = \int_{v_0}^{v} vdv \quad \text{বা, } a\int_0^s ds = \int_{v_0}^{v} vdv$$

বা, $$a[s]_0^s = \left[\frac{v^2}{2}\right]_{v_0}^{v}$$

বা, $$a(s - 0) = \left(\frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2}\right)$$

বা, $$as = \frac{v^2 - v_0^2}{2}$$

বা, $$2as = v^2 - v_0^2$$

বা, $$v^2 = v_0^2 + 2as \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (3.30)$$

আবার, বস্তুটি স্থির অবস্থান হতে সমত্বরণে চলা শুরু করলে,

আমরা পাই,

$$v^2 = 0^2 + 2as$$

বা, $$v^2 = 2as$$

বা, $$v^2 = \text{ধ্রুবক} \times s \quad [\because 2a \text{ ধ্রুব সংখ্যা}]$$

বা, $$v^2 \propto s$$

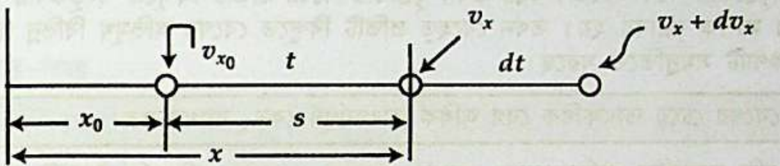
বা, $$v \propto \sqrt{s}$$

অর্থাৎ **স্থির অবস্থান হতে সমত্বরণে গতিশীল কোনো বস্তুর শেষ বেগ অতিক্রান্ত দূরত্বের বর্গমূলের সমানুপাতিক।**

$v_x^2 = v_x^2 + 2a_x(x - x_0)$ প্রতিপাদন :

মনে করি, একটি বস্তু X-অক্ষ বরাবর a_x সমত্বরণে গতিশীল।

গণনার শুরুতে, অর্থাৎ যখন সময়, $t = 0$ তখন বস্তুটির আদিবেগ $= v_{x0}$ এবং আদি অবস্থান $= x_0$ এবং t সময় পরে বেগ $= v_x$ এবং অবস্থান $= x$



চিত্র ৩·২৭

এখন, বস্তুটি ওই X-অক্ষ বরাবরই আরও অতি ক্ষুদ্র সময় dt পরে $v_x + dv_x$ বেগ প্রাপ্ত হলে, তাৎক্ষণিক ত্বরণের সংজ্ঞানুসারে, আমরা পাই,

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}$$

বা, $a_x = \frac{dv_x}{dx} \times \frac{dx}{dt}$ বা, $a_x = \frac{dv_x}{dx} \times v_x$

বা, $a_x dx = v_x \times dv_x$ ... ... (3.31)

যখন $x = x_0$, তখন $v = v_{x0}$ এবং যখন $x = x$, তখন $v = v_x$; এই সীমার মধ্যে সমীকরণ (3.31)-এর উভয় পক্ষকে সমাকলন করে পাই,

$$\int_{x_0}^{x} a_x dx = \int_{v_{x0}}^{v_x} v_x dv_x$$

বা, $a_x \int_{x_0}^{x} dx = \int_{v_{x0}}^{v_x} v_x dv_x$ বা, $a_x [x]_{x_0}^{x} = \left[\frac{v_x^2}{2}\right]_{v_{x0}}^{v_x}$

বা, $a_x(x - x_0) = \left(\frac{v_x^2}{2} - \frac{v_{x0}^2}{2}\right)$ বা, $a_x(x - x_0) = \frac{v_x^2 - v_{x0}^2}{2}$

বা, $v_x^2 - v_{x0}^2 = 2a_x(x - x_0)$ বা, $v_x^2 = v_{x0}^2 + 2a_x(x - x_0)$

অনুসন্ধানমূলক কাজ : একটি গাড়ির গতি দ্বিগুণ হলে ব্রেক চেপে থামানোর দূরত্ব কতগুণ হতে হবে? ব্যাখ্যা কর।

ধরা যাক, v_0 বেগে গতিশীল একটি গাড়িতে ব্রেক চেপে a মন্দন সৃষ্টি করা হলো, ফলে s দূরত্বে গিয়ে গাড়িটি থামল। এখানে চূড়ান্ত বেগ $v = 0$।

আমরা জানি,

$$v^2 = {v_0}^2 - 2as$$

বা, $s = \frac{{v_0}^2}{2a}$

বা, $s \propto {v_0}^2$ (ব্রেকের জন্য মন্দন, a = ধ্রুবক)

সুতরাং, গাড়ির প্রাথমিক বেগ দ্বিগুণ হলে, গাড়িটি থামানোর দূরত্ব, $s = (2)^2 = 4$ গুণ হতে হবে।

গাণিতিক উদাহরণ ৩.৩

১। একটি গতিশীল কণার অতিক্রান্ত দূরত্ব সময়ের বর্গের সমানুপাতিক হলে বস্তুটির ত্বরণ কীরূপ হবে ?

এখানে,

$s \propto t^2$ বা, $s = Kt^2$

$\therefore \quad v = \frac{ds}{dt} = 2Kt$

ত্বরণ, $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(2Kt) = 2K$ = ধ্রুবক

সুতরাং, বস্তুটির ত্বরণ ধ্রুবক।

কাজ : সমদ্রুতিসম্পন্ন কোনো কণার বেগ কী অসম হতে পারে ?

সমদ্রুতিসম্পন্ন একটি কণার বেগ অসম হতে পারে। সমদ্রুতিতে গতিশীল কোনো কণার অভিমুখ যখন পরিবর্তিত হয় তখন কণার গতিবেগের পরিবর্তন হয়। অর্থাৎ কণার বেগ অসম হয়; কিন্তু দ্রুতির কোনো পরিবর্তন হয় না। যখন একটি কণা সমদ্রুতিতে বৃত্তাকার পথে আবর্তন করে তখন বৃত্তাকার পথের প্রতিটি বিন্দুতে বস্তুকণার বেগের অভিমুখ ওই বিন্দুতে বৃত্তাকার পথের স্পর্শক বরাবর হয়। তখন যেহেতু প্রতিটি বিন্দুতে বেগের অভিমুখ বিভিন্ন হয় ফলে বস্তুর বেগ অসমবেগ হয়, যদিও কণাটি সমদ্রুতিতে ঘুরছে।

কাজ : বলবিদ্যায় গড় বেগের চেয়ে তাৎক্ষণিক বেগ অধিক তাৎপর্যপূর্ণ কেন, ব্যাখ্যা কর।

কোনো বস্তুর গতি সম্বন্ধীয় পর্যালোচনায় বেগের সুষমতা, বেগের পরিবর্তন ইত্যাদি সম্বন্ধে ধারণা খুবই গুরুত্বপূর্ণ। এই ধারণাগুলি গড় বেগ থেকে পাওয়া যায় না। সেই কারণে গড় বেগের তুলনায় তাৎক্ষণিক বেগ অধিক তাৎপর্যপূর্ণ।

কাজ : একজন গাড়ি চালককে শেখানো হয় যে গাড়ির বেগ দ্বিগুণ করলে গাড়িটিকে থামানোর দূরত্ব চারগুণ হতে হবে। ব্যাখ্যা কর।

ধরা যাক, গাড়ির প্রাথমিক বেগ v_0 এবং a সমমন্দনে চলায় গাড়িটি x দূরত্বে গিয়ে থামল।

$\therefore \quad x = \dfrac{v_0^2}{2a}$ $\qquad [\because v^2 = v_0^2 - 2ax]$

বা, $\quad x \propto v_0^2$ $\qquad [\because a = \text{ধ্রুবক}]$

সুতরাং গাড়ির বেগ দ্বিগুণ করলে, গাড়িটিকে থামানোর দূরত্ব $(2)^2$ অর্থাৎ চারগুণ হবে।

৩.৭ অবস্থান-সময়, দূরত্ব-সময় ও বেগ-সময় লেখচিত্র

Position-time, distance-time and velocity-time graphs

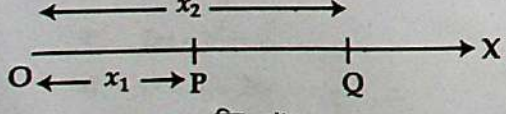
বস্তুর অবস্থানের পরিবর্তন অবস্থান-সময়, দূরত্বের পরিবর্তন দূরত্ব-সময় এবং বেগের পরিবর্তন বেগ-সময় লেখচিত্রের সাহায্যে প্রকাশ করা যায়।

৩.৭.১ অবস্থান-সময় লেখচিত্র

Position-time graphs

সময় অতিবাহিত হওয়ার সাথে সাথে একটি গতিশীল বস্তুর অবস্থানের পরিবর্তন ঘটে। এই সম্পর্ক লেখচিত্রের মাধ্যমে প্রকাশ করা যায়। এক্ষেত্রে গ্রাফ কাগজে X-অক্ষ বরাবর সময় (t) Y-অক্ষ বরাবর অবস্থানের পরিবর্তন (Δx) স্থাপন করা হয়। এই লেখচিত্রকে অবস্থান-সময় লেখচিত্র বলে। এই লেখচিত্র থেকে বস্তুর বেগ নির্ণয় করা হয়। নিম্নে সুষম ও অসম বস্তুর গতি বুঝানো হয়েছে এবং সরলরেখা বরাবর গতি বিবেচনা করা হয়েছে।

১. কোনো বস্তু একটি নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে কোনো নির্দিষ্ট দূরত্বে অবস্থিত হলে সেই বিন্দু থেকে বস্তুর দূরত্বকে অবস্থান (position) বলে।

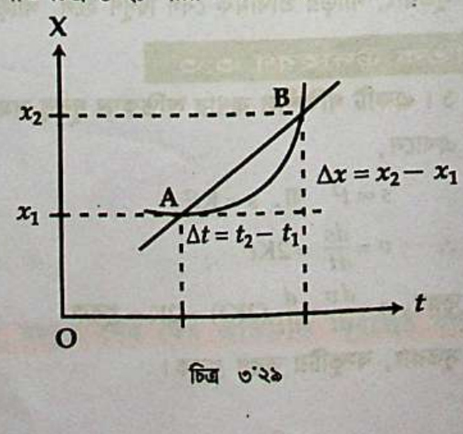


চিত্র ৩.২৮

মনে কর একটি বস্তু X-অক্ষ বরাবর গতিশীল। বস্তুটি যখন P বিন্দুতে তখন মূলবিন্দু O থেকে বস্তুটির দূরত্ব x_1 এবং যখন Q বিন্দুতে অবস্থান করে তখন দূরত্ব x_2। X-অক্ষ বরাবর বস্তুর এরূপ গতি চিত্র ৩.২৮ দ্বারা প্রকাশ করা যায়।

আবার মনে করি কোনো একটি বস্তু t_1 সময়ে A বিন্দুতে এবং t_2 সময়ে B বিন্দুতে অবস্থান করে। X-অক্ষ বরাবর A ও B বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে x_1 এবং x_2। এক্ষেত্রে t_2 এবং t_1 সময়ের মধ্যকার ব্যবধান $\Delta t = t_2 - t_1$ চিত্র ৩.২৯ এ দেখানো হলো।

২. লেখচিত্রের সাহায্যেও কোনো বস্তুর গতির বিষয়ে আলোচনা করা যায়। এই পদ্ধতিতে Y-অক্ষ বরাবর সরণ, বেগ বা ত্বরণের মানকে এবং x-অক্ষ বরাবর সময় সূচিত করে লেখচিত্র আঁকা যায়।



চিত্র ৩.২৯

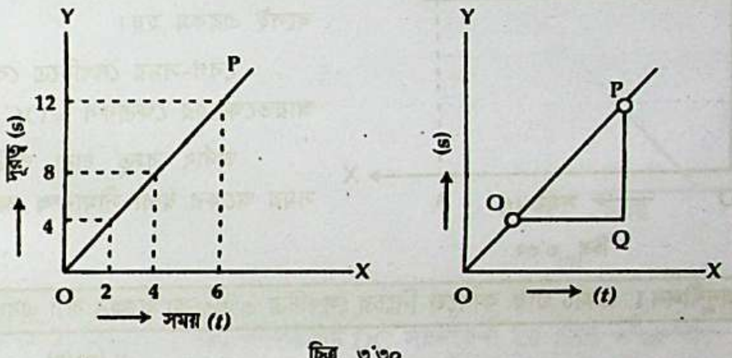
৩·৭·২ দূরত্ব-সময় লেখচিত্র
Distance-time graphs

(i) দূরত্ব-সময় লেখচিত্র (সমবেগের ক্ষেত্রে) :

একটি মোটর সাইকেলের গতি সমতল রাস্তায় 2 মিনিট পরপর নিচের সারণিতে দেখানো হলো [সারণি ৩·১]।

সারণি ৩·১ : দূরত্ব–সময়

সময় t (min)	দূরত্ব s (km)
0	0
2	4
4	8
6	12



চিত্র ৩·৩০

সমবেগে গতিশীল বস্তু একই সময়ে একই দূরত্ব অতিক্রম করবে। সুতরাং সময় সাপেক্ষে দূরত্বের লেখচিত্র মূল বিন্দুগামী একটি সরলরেখা OP হয় [চিত্র ৩·৩০]।

$$\text{OP রেখার ঢাল} = \frac{PQ}{OQ} = \frac{\text{দূরত্ব}}{\text{সময়}} = \text{বেগ}$$

অতএব বস্তুর সমবেগে দূরত্ব-সময় লেখচিত্রের নতির সমান হয়। অর্থাৎ যে কোনো সময়ে বেগের মান হবে ওই বিন্দুতে অঙ্কিত ঢালের মান।

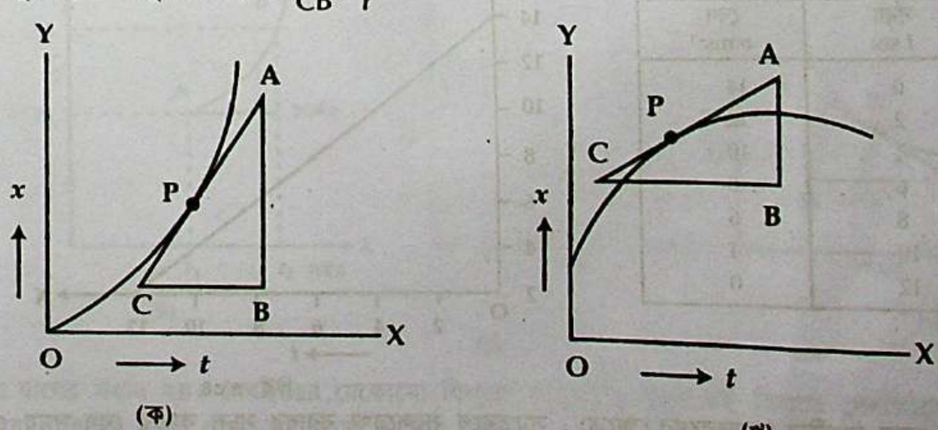
কাজ : একটি গ্রাফ কাগজে তোমার পছন্দমতো ও সুবিধাজনক মান নিয়ে উপরের সারণিতে বর্ণিত গতির জন্য দূরত্ব-সময় লেখচিত্রটি অঙ্কন কর। এই লেখচিত্র থেকে এবং 10 মিনিটে অতিক্রান্ত দূরত্ব ও বেগ নির্ণয় কর।

(ii) দূরত্ব-সময় লেখচিত্র (অসম বেগের ক্ষেত্রে) :

অসম বেগে গতিশীল বস্তু একই সময়ে একই দূরত্ব অতিক্রম করে না। অবস্থান (x) ও সময় (t) এর লেখচিত্র বক্ররেখা হয়। যেকোনো সময়ের বেগ নির্ণয়ে ওই বিন্দু হতে স্পর্শক টেনে ঢাল নিলে বেগ পাওয়া যায়। ৩·৩১ চিত্রে P বিন্দুতে বেগ নির্ণয় করা হয়েছে।

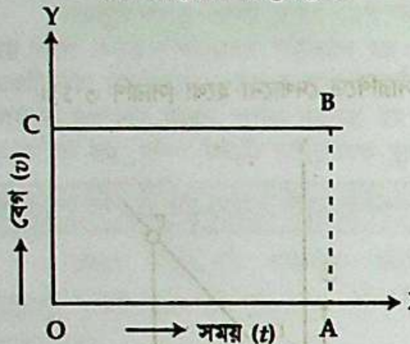
এরূপ বক্ররেখার ঢাল বিভিন্ন বিন্দুতে বা ভিন্ন ভিন্ন সময়ে ভিন্ন হয়। এই ঢালের মান ওই সময়ে অসম বেগের মান নির্দেশ করে।

চিত্র অনুযায়ী, P বিন্দুতে বেগ, $v = \frac{AB}{CB} = \frac{x}{t}$



চিত্র ৩·৩১

৩·৭·৩ বেগ-সময় লেখচিত্র
Velocity-time graphs



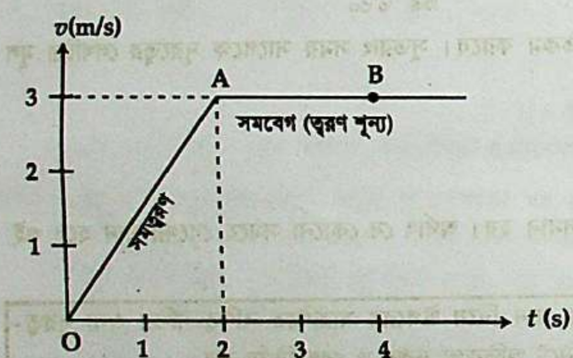
চিত্র ৩·৩২

(i) **বেগ-সময় লেখচিত্র (সমবেগের ক্ষেত্রে) :** সমবেগে চলমান বস্তুর সময় সাপেক্ষে বেগের লেখচিত্র সময় অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখা CB হয় [চিত্র ৩·৩২]। সময়ের সাথে বেগের কোনো পরিবর্তন হয় না বলেই এরকম হয়।

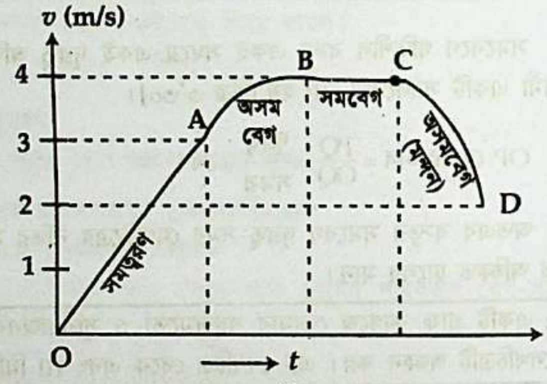
বেগ-সময় লেখচিত্রে বেগ ও সময় অক্ষ দ্বারা সীমাবদ্ধ OABC আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= OC \times OA = vt = s$

অর্থাৎ বস্তু দ্বারা অতিক্রান্ত দূরত্ব বেগ-সময় লেখচিত্রের বেগ ও সময় অক্ষের দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রফলের সমান হয়।

কর্ম অনুশীলন I. একটি গ্রাফ কাগজে নিচের লেখচিত্র ৩·৩৩(ক) অঙ্কন কর এবং A এবং B বিন্দুতে বেগ ব্যাখ্যা কর।



চিত্র ৩·৩৩(ক)



চিত্র ৩·৩৩(খ)

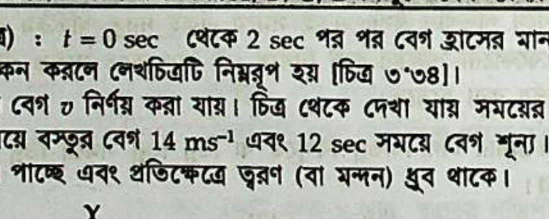
কর্ম অনুশীলন II. একটি গ্রাফ কাগজে লেখচিত্র ৩·৩৩(খ) অঙ্কন কর এবং A, B, C, D বিন্দুতে বেগ ব্যাখ্যা কর।

(ii) বেগ-সময় লেখচিত্র (অসমবেগের ক্ষেত্রে) : $t = 0$ sec থেকে 2 sec পর পর বেগ হ্রাসের মান সারণি ৩·২ দেওয়া হলো। প্রাপ্ত মান থেকে $v — t$ লেখচিত্র অঙ্কন করলে লেখচিত্রটি নিম্নরূপ হয় [চিত্র ৩·৩৪]।

এই লেখচিত্রে যে কোনো সময় t-তে বস্তুর বেগ v নির্ণয় করা যায়। চিত্র থেকে দেখা যায় সময়ের সাথে সাথে বেগ হ্রাস পায়। চিত্র থেকে আরও দেখা যায়, 0 সময়ে বস্তুর বেগ 14 ms^{-1} এবং 12 sec সময়ে বেগ শূন্য। এটি একটি অসম বেগ। এক্ষেত্রে সময়ের সাথে সাথে বেগ হ্রাস পাচ্ছে এবং প্রতিক্ষেত্রে ত্বরণ (বা মন্দন) ধ্রুব থাকে।

সারণি : ৩·২

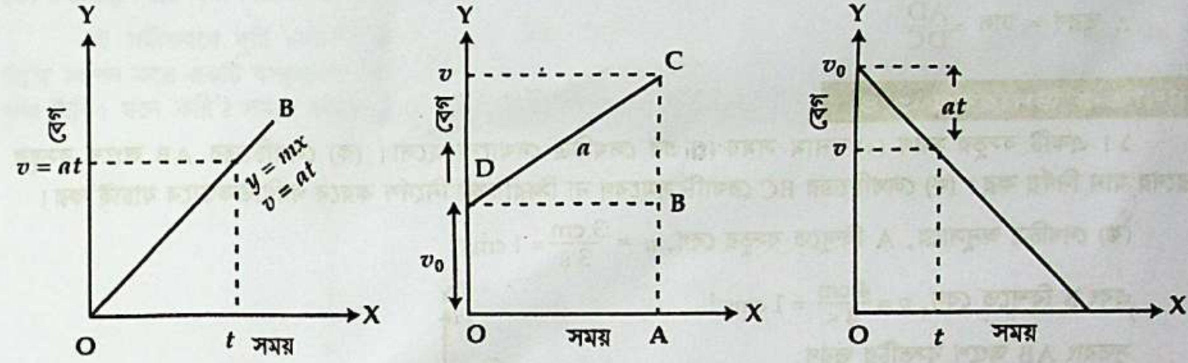
সময় t sec	বেগ v ms^{-1}
0	14
2	12
4	10
6	8
8	6
10	4
12	0



চিত্র ৩·৩৪

(iii) বেগ-সময় লেখচিত্র (সমত্বরণের ক্ষেত্রে) : সমত্বরণে সরলরেখা বরাবর সচল বস্তুর বেগ-সময় লেখচিত্রটি একটি সরলরেখা হয়। একই সময় অবকাশে একই পরিমাণ বেগ বৃদ্ধি হয় বলে লেখচিত্রটি এরূপ হয়। বস্তুটি স্থির

অবস্থান থেকে যাত্রা শুরু করলে সরলরেখাটি মূল বিন্দুগামী হয়, ৩.৩৫(ক) চিত্রে OB সরলরেখা। এই সরলরেখার ঢাল থেকে ত্বরণ নির্ণয় করা যায়।



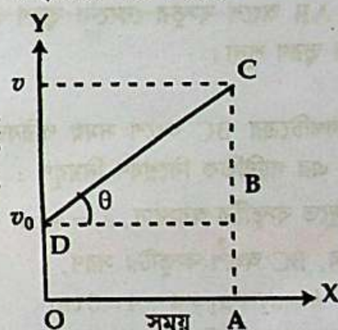
(ক) (খ) (গ)

চিত্র ৩.৩৫

কিন্তু বস্তুটির যদি প্রাথমিক বেগ থাকে তবে বেগ-সময় লেখচিত্রটি DC সরলরেখা হয় [চিত্র ৩.৩৫(খ)]। এখানে OD = প্রাথমিক বেগ v_0। দুটি ক্ষেত্রেই সরলরেখাটির নতি বা ঢাল বস্তুর সমত্বরণের সমান হয়।

ত্বরণ নির্ণয় : চিত্র ৩.৩৫(খ)–এ সময় t = OA,

প্রাথমিক বেগ v_0 = OD, চূড়ান্ত বেগ, v = AC



$$\text{ত্বরণ, } a = \frac{\text{বেগ পরিবর্তন}}{\text{সময়}}$$

$$= \frac{AC - OD}{OA} = \frac{AC - AB}{BD}$$

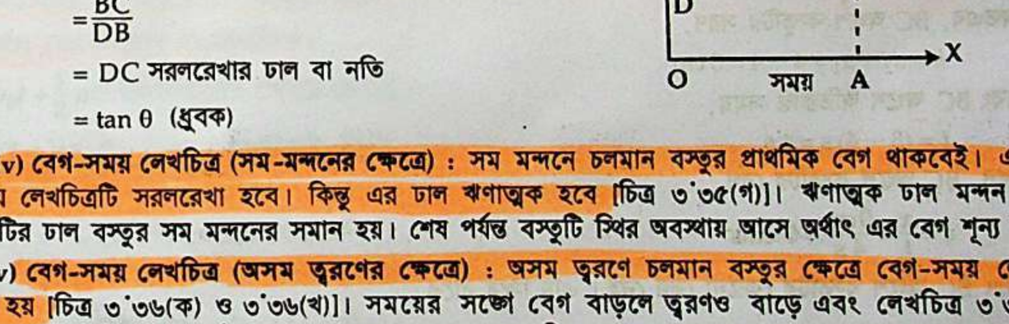
$$= \frac{BC}{DB}$$

= DC সরলরেখার ঢাল বা নতি

= $\tan\theta$ (ধ্রুবক)

(iv) বেগ-সময় লেখচিত্র (সম-মন্দনের ক্ষেত্রে) : সম মন্দনে চলমান বস্তুর প্রাথমিক বেগ থাকবেই। এক্ষেত্রেও বেগ-সময় লেখচিত্রটি সরলরেখা হবে। কিন্তু এর ঢাল ঋণাত্মক হবে [চিত্র ৩.৩৫(গ)]। ঋণাত্মক ঢাল মন্দন বুঝায়। সরলরেখাটির ঢাল বস্তুর সম মন্দনের সমান হয়। শেষ পর্যন্ত বস্তুটি স্থির অবস্থায় আসে অর্থাৎ এর বেগ শূন্য হয়।

(v) বেগ-সময় লেখচিত্র (অসম ত্বরণের ক্ষেত্রে) : অসম ত্বরণে চলমান বস্তুর ক্ষেত্রে বেগ-সময় লেখচিত্রটি বক্ররেখা হয় [চিত্র ৩.৩৬(ক) ও ৩.৩৬(খ)]। সময়ের সঙ্গে বেগ বাড়লে ত্বরণও বাড়ে এবং লেখচিত্র ৩.৩৬(ক) ও ৩.৩৬(খ)-এর অনুরূপ হয়। পূর্বের মতো আমরা প্রমাণ করতে পারি যে, $(t_2 - t_1)$ সময় অবকাশে গড় ত্বরণের মান AB



(ক) (খ) (গ)

চিত্র ৩.৩৬

জ্যা-এর ঢালের সমান হয়। লেখচিত্রের যেকোনো বিন্দুতে তাৎক্ষণিক ত্বরণ ওই বিন্দুতে লেখচিত্রের স্পর্শকের ঢালের সমান হয়। সময়ের সঙ্গে লেখচিত্রটির ঢাল বাড়তে থাকে। এ থেকে বোঝা যায় যে, ত্বরণ স্থির নয় [চিত্র ৩.৩৬(খ)]

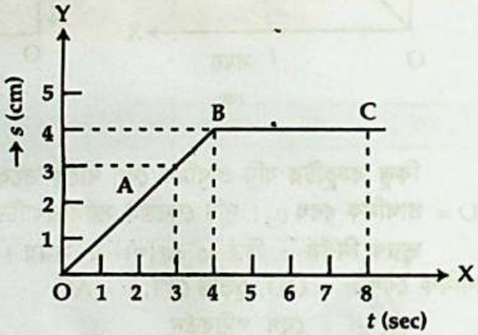
বরং সময়ের সঙ্গে বাড়ছে। বস্তুর বেগ সময়ের সাথে কমলে বা মন্দন হলে লেখচিত্রটি ৩.৩২(গ) চিত্রের অনুরূপ হয়। P বিন্দুর ত্বরণ ΔADC এর ঢাল থেকে পাওয়া যায়।

$\therefore$ ত্বরণ = ঢাল $= \frac{AD}{DC}$

গাণিতিক উদাহরণ ৩.৪

১। একটি বস্তুর সরণ (s) বনাম সময় (t) এর লেখচিত্র দেখানো হলো। (ক) লেখচিত্রের AB অংশে বস্তুর ত্বরণের মান নির্ণয় কর। (খ) লেখচিত্রের BC রেখাটি সমবেগ না স্থিরাবস্থা নির্দেশ করবে গাণিতিকভাবে যাচাই কর।

(ক) লেখচিত্র অনুসারে, A বিন্দুতে বস্তুর বেগ, $u = \frac{3\text{ cm}}{3\text{ s}} = 1\text{ cms}^{-1}$



এবং B বিন্দুতে বেগ, $v = \frac{4\text{ cm}}{4\text{ s}} = 1\text{ cms}^{-1}$

সুতরাং AB অংশে বস্তুটির ত্বরণ,

$$a = \frac{v-u}{t_2-t_1} = \frac{1\text{ cms}^{-1} - 1\text{ cms}^{-1}}{(4-3)}$$

$$= \frac{0\text{ cms}^{-1}}{1\text{ s}} = 0\text{ cms}^{-2}$$

অর্থাৎ AB অংশে বস্তুর কোনো ত্বরণ নেই। সুতরাং AB অংশে বস্তুটির ত্বরণ শূন্য।

(খ) লেখচিত্রের BC অংশে সময় পরিবর্তনের সাথে দূরত্ব একই থাকে। অর্থাৎ BC রেখাটি বস্তুটির স্থিরাবস্থা নির্দেশ করে। এর গাণিতিক বিশ্লেষণ নিম্নরূপ :

B বিন্দুতে বস্তুটির অবস্থান, $s_1 = 4$ cm এবং C বিন্দুতে বস্তুটির অবস্থান, $s_2 = 4$ cm

অতএব, BC অংশে বস্তুটির সরণ,

$$h = x_2 - x_1 = 4 - 4 = 0\text{ cm}$$

এবং BC অংশে অতিক্রান্ত সময়,

$$t = (8-4)\text{ s} = 4\text{ s}$$

এখন, BC অংশে বস্তুটির বেগ,

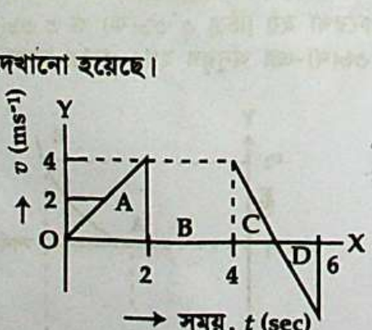
$$v = \frac{x}{t} = \frac{0\text{ cm}}{4\text{ s}} = 0\text{ cms}^{-1}$$

অর্থাৎ BC অংশে বস্তুটির কোনো বেগ নেই। এটি স্থির থাকে।

২। চিত্রে সরলরেখা বরাবর গতিশীল একটি কণার বেগ-সময় লেখচিত্রে দেখানো হয়েছে।

(i) 6 sec-এ অতিক্রান্ত দূরত্ব এবং

(ii) 6 sec-এ কণার সরণ নির্ণয় কর।



(i) কণা কর্তৃক অতিক্রান্ত দূরত্ব, বেগ-সময় লেখচিত্র এবং সময় অক্ষের মধ্যবর্তী ক্ষেত্রফলের সমান।

সুতরাং 6 sec-এ অতিক্রান্ত দূরত্ব,

$$x = \text{ক্ষেত্রফল A + ক্ষেত্রফল B + ক্ষেত্রফল C + ক্ষেত্রফল D}$$

$$= \frac{1}{2}\times 4\times 2 + 4\times 2 + \frac{1}{2}\times 4\times 1 + \frac{1}{2}\times 1\times 4$$

$$= 4 + 8 + 2 + 2 = 16\text{ m}$$

(ii) 6 sec-এ কণার সরণ,

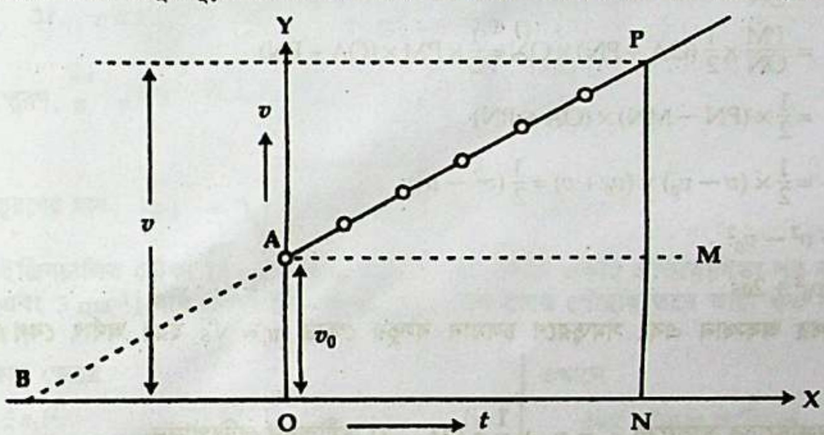
$$s = \text{ক্ষেত্রফল A + ক্ষেত্রফল B + ক্ষেত্রফল C − ক্ষেত্রফল D}$$

$$= 4 + 8 + 2 - 2 = 12\text{ m}$$

৩.৭.৪ বেগ-সময় লেখচিত্রের সাহায্যে গতির সমীকরণ প্রতিপাদন

(ক) $v = v_0 + at$ সমীকরণের ক্ষেত্রে লেখচিত্র

এই সমীকরণে দুটি চলরাশি আছে, একটি হলো সময় t অপরটি হলো বেগ v। t কে X অক্ষে এবং v কে Y অক্ষে স্থাপন করে একটি বস্তুকণার বেগ-সময় লেখচিত্র আঁকা হলো [চিত্র ৩.৩৭]। চিত্রে P বিন্দু হতে Y অক্ষের উপর PY লম্ব টানি। মনে করি t সময়ে বস্তুর চূড়ান্ত বেগ $= v = OY$; এখন $OY = OA + AY$ অর্থাৎ $v = v_0 + at$.



চিত্র ৩.৩৭

এখানে ঢাল, $a = \frac{PM}{AM} = \frac{AY}{AM} = \frac{AY}{t}$

$\therefore \quad v = v_0 + at$ সমীকরণটি লেখচিত্রে উপস্থাপন করা যায়।

স্থির অবস্থান থেকে চলমান বস্তুর ক্ষেত্রে $v_0 = 0, a =$ ধ্রুবক হয় $\therefore \; v = 0 +$ ধ্রুবক $\times t \quad \therefore \; v \propto t$

অর্থাৎ বেগ সময়ের সমানুপাতিক।

(খ) $s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ সমীকরণের ক্ষেত্রে লেখচিত্র

চিত্র ৩.৩৭-এ v বনাম t লেখচিত্রটি একটি সরলরেখা। চিত্রে $PN \perp OX$; $AM \perp PN$

ধরি আদি বেগ $= v_0$, সমত্বরণ $= a$, $ON = t$ এবং t সময়ে অতিক্রান্ত দূরত্ব $= s$

এখন s = OAPN ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

= OAMN আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল + AMP ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

$= OA \times ON + \frac{1}{2} \times AM \times PM$

$= v_0 t + \frac{1}{2} \times AM \times PM$

আবার ঢাল, $a = \frac{PM}{AM} = \frac{PM}{t}$

বা, $a = \frac{PM}{t}$

$\therefore \quad PM = at$

$\therefore \quad s = v_0 t + \frac{1}{2} t \times at = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$

অতএব সমীকরণটি লেখচিত্রে উপস্থাপন করা যায়।

স্থির অবস্থান থেকে সমত্বরণে চলমান বস্তুর ক্ষেত্রে $s = 0 \times t + \frac{1}{2} \times$ ধ্রুবক $\times t^2$

বা, $s =$ ধ্রুবক $\times t^2$ বা, $s \propto t^2$

অর্থাৎ সরণ সময়ের বর্গের সমানুপাতিক।

(গ) বেগ-সময় লেখচিত্রের সাহায্যে $v^2 = v_0^2 + 2as$ সমীকরণ প্রতিপাদন

চিত্র ৩.৩৭-এ AP সরলরেখার ঢাল বা নতি

$$a = \frac{PM}{AM} = \frac{PM}{ON}$$

সুতরাং, $as = \frac{PM}{ON} \times$ OAPN ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$$= \frac{PM}{ON} \times \frac{1}{2}(OA + PN) \times ON = \frac{1}{2} \times PM \times (OA + PN)$$

$$= \frac{1}{2} \times (PN - MN) \times (OA + PN)$$

$$= \frac{1}{2} \times (v - v_0) \times (v_0 + v) = \frac{1}{2}(v^2 - u^2)$$

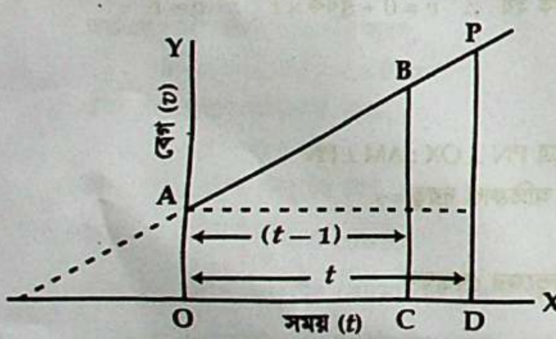
বা, $2as = v^2 - v_0^2$

বা, $v^2 = v_0^2 + 2as$

এক্ষেত্রে স্থির অবস্থান এবং সমত্বরণে চলমান বস্তুর ক্ষেত্রে $v \propto \sqrt{s}$ হয়। অর্থাৎ বেগ দূরত্বের বর্গমূলের সমানুপাতিক।

(ঘ) বেগ–সময় লেখচিত্রের সাহায্যে $s_t = v_0 + \frac{1}{2}a(2t - 1)$ সমীকরণ প্রতিপাদন

বেগ–সময় লেখচিত্র ৩.৩৮-এ AP সরলরেখাটি কণার গতি নির্দেশ করে। অর্থাৎ AP সরলরেখার সমীকরণ হলো $v = v_0 + at$। মনে করি ওই সরলরেখায় AB ও AP অংশদ্বয় যথাক্রমে $(t - 1)$ সেকেন্ড ও t সেকেন্ড সময় পর্যন্ত গতি নির্দেশ করে। সুতরাং BP রেখাংশ t-তম সেকেন্ডের গতি নির্দেশ করে। তাই t-তম সেকেন্ডের সরণ



চিত্র ৩.৩৮

s_t = BP রেখাংশ ও সময় অক্ষের মধ্যবর্তী ক্ষেত্রফল

= CBPD ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}(CB + DP) \times CD$

চিত্র ৩.৩৮-এ $CD = OD - OC = -(t-1) = 1$ s

CB = $(t - 1)$ সময়ে বেগ $= v_0 + a(t - 1)$

DP = t সময়ে বেগ $= v_0 + at$

$$\therefore \quad s_t = \frac{1}{2}[v_0 + a(t-1) + v_0 + at] \times 1$$

$$= \frac{1}{2}[2v_0 + a(2t - 1)]$$

$$= v_0 + \frac{1}{2}a(2t - 1)$$

কাজ : একটি গতিশীল কণা কর্তৃক অতিক্রান্ত দূরত্ব সময়ের বর্গের সমানুপাতিক হলে বস্তুটি সমবেগে চলছে, না সমত্বরণে চলছে ? ব্যাখ্যা কর।

প্রশ্নানুসারে,

$x \propto t^2$ [এখানে x অতিক্রান্ত দূরত্ব এবং t = সময়]

$\therefore \quad x = ct^2$

এখন বেগ, $v = \frac{dx}{dt} = 2ct$ [c = ধ্রুবক]

এবং ত্বরণ, $a = \frac{dv}{dt} = 2c$

সুতরাং, কণাটি সমত্বরণে চলছে।

গাণিতিক উদাহরণ ৩.৫

১। একটি বস্তুর বেগ 8s-এ $(4\hat{i}+2\hat{j})\ ms^{-1}$ হতে বৃদ্ধি পেয়ে $(12\hat{i}-4\hat{j})\ ms^{-1}$ হলো। গড় ত্বরণ নির্ণয় কর।

প্রশ্নানুযায়ী, $\Delta\vec{v} = \{(12\hat{i}-4\hat{j}) - (4\hat{i}+2\hat{j})\}\ ms^{-1} = (8\hat{i}-6\hat{j})\ ms^{-1}$ এবং

$\Delta t = 8\ s$

$\therefore$ গড় ত্বরণ, $\vec{a} = \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \dfrac{(8\hat{i}-6\hat{j})\ ms^{-1}}{8s} = (\hat{i}-\dfrac{3}{4}\hat{j})\ ms^{-2}$

এবং গড় ত্বরণের মান, $|\vec{a}| = \sqrt{(1)^2+\left(-\dfrac{3}{4}\right)^2}\ ms^{-2} = 1{\cdot}25\ ms^{-2}$

২। দুটি ইঞ্জিনচালিত নৌকা $10\ ms^{-1}$ এবং $5\ ms^{-1}$ বেগ নিয়ে একটি প্রতিযোগিতা শুরু করে। তাদের ত্বরণ যথাক্রমে $2\ ms^{-2}$ এবং $3\ ms^{-2}$। যদি নৌকা দুটি একই সময়ে শেষ প্রান্তে পৌঁছায় তবে তারা কত সময় প্রতিযোগিতায় অংশগ্রহণ করেছিল ?

প্রথম নৌকার ক্ষেত্রে

$$s = v_{01}t + \frac{1}{2}a_1t^2 \quad \cdots \quad \cdots \quad \text{(i)}$$

দ্বিতীয় নৌকার ক্ষেত্রে

$$s = v_{02}t + \frac{1}{2}a_2t^2 \quad \cdots \quad \cdots \quad \text{(ii)}$$

সমীকরণ (i) ও (ii) থেকে পাই

$$v_{01}t + \frac{1}{2}a_1t^2 = v_{02}t + \frac{1}{2}a_2t^2$$

$$(v_{01}-v_{02})t = \frac{1}{2}(a_2-a_1)t^2 \quad \cdots \quad \text{(iii)}$$

বা, $(10-5)t = \frac{1}{2}(3-2)t^2$ বা, $5t = \frac{1}{2}\times t^2$

বা, $5 = \frac{1}{2}t$

$\therefore\ t = 10$ sec

এখানে

প্রথম নৌকার আদিবেগ, $v_{01} = 10\ ms^{-1}$

প্রথম নৌকার ত্বরণ, $a_1 = 2\ ms^{-2}$

দ্বিতীয় নৌকার আদিবেগ, $= v_{02} = 5\ ms^{-1}$

দ্বিতীয় নৌকার ত্বরণ, $a_2 = 3\ ms^{-2}$

৩। একটি ট্রেন স্থির অবস্থান হতে $10\ ms^{-2}$ ত্বরণে চলতে আরম্ভ করল। একই সময়ে একটি গাড়ি $100\ ms^{-1}$ সমবেগে ট্রেনের সমান্তরালে চলা শুরু করল। ট্রেন গাড়িটিকে কখন পিছনে ফেলে যাবে ?

মনে করি, ট্রেনটি t সময় পরে s দূরত্ব অতিক্রম করে গাড়িটিকে পিছনে ফেলবে।

ট্রেনের ক্ষেত্রে

$$s = v_{01}t = \frac{1}{2}a_1t^2$$

বা, $s = 0 + \frac{1}{2}\times 10\times t^2$

বা, $s = 5t^2 \quad \cdots \quad \cdots \quad \text{(i)}$

এখানে,

ট্রেনের আদিবেগ, $v_{01} = 0$

ত্বরণ, $a_1 = 10\ ms^{-2}$

গাড়ির আদিবেগ, $v_{02} = 100\ ms^{-1}$

গাড়ির ত্বরণ, $a_2 = 0$

গাড়ির ক্ষেত্রে

$$s = v_{02}t + \frac{1}{2}a_2t^2$$

বা, $s = 100t + \frac{1}{2}\times 0$

বা, $s = 100t \quad \cdots \quad \cdots \quad \text{(ii)}$

(i) ও (ii) নং সমীকরণ থেকে পাই,

$5t^2 = 100t$

$\therefore\ t = \dfrac{100}{5} = 20\ s$

বিকল্প : সমবেগের ক্ষেত্রে, $s = vt = 100\,t$

$\therefore \quad t = \frac{100}{s} = \frac{100}{5} = 20\text{ s}$

৪। একটি বুলেট কোনো দেয়ালে 0·04 m প্রবেশের পর 75% বেগ হারায়। ওই দেয়ালে বুলেটটি আর কতদূর প্রবেশ করতে পারবে ? [রা. বো. ২০১০]

এখানে,
প্রথম ক্ষেত্রে
আদিবেগ, $v_{x_0} = v_{x_0}$
দূরত্ব, $s_1 = 0{\cdot}04\text{ m}$
0·04 m যাওয়ার পরে শেষ বেগ
$v_{x_1} = \frac{v_{x_0}}{4}$
ত্বরণ, $a_x = ?$

আমরা জানি,

$$v_{x_1}^2 = v_{x0}^2 + 2a_x s_1$$

বা, $$a_x = \frac{v_{x_1}^2 - v_{x0}^2}{2s_1} = \frac{\frac{v_{x0}^2}{16} - v_{x0}^2}{2s_1}$$

$$= \frac{-15v_{x0}^2}{32s_1} = \frac{-15v_{x0}^2}{32\times 0{\cdot}04}$$

$$= \frac{-15v_{x0}^2}{1{\cdot}28}$$

এখানে,
দ্বিতীয় ক্ষেত্রে
আদিবেগ, $v_{x_{01}} = \frac{v_{x_0}}{4}$
ত্বরণ, $a_x = -15\,v_{x0}^2/32\times{\cdot}04$
শেষ বেগ, $v_{x_2} = 0$
দূরত্ব, $s_2 = ?$

আবার, $v_{x_2}^2 = v_{x01}^2 + 2a_x s_2$

$$0 = \frac{vx_0^2}{16} + 2\times\left(\frac{-15v_{x0}^2}{1{\cdot}28}\right)\times s_2$$

$$= \frac{v_{x0}^2}{16} + \frac{30v_{x0}^2}{1{\cdot}28}s_2$$

$$= \frac{30v_{x0}^2}{1{\cdot}28}s_2 = \frac{v_{x0}^2}{16}$$

$$\therefore \quad s_2 = \frac{1{\cdot}28}{480} = 2{\cdot}67\times10^{-3}\text{ m}$$

৫। স্থির মানের বলের ক্রিয়ায় একমাত্রিক স্থানে গতিশীল একটি বস্তুকণার সরণ (x) সময়ের সাথে $t = \sqrt{x} + 5$ সমীকরণ দ্বারা সম্পর্কিত। দেখাও যে বস্তুকণার বেগ যখন শূন্য তখন কণাটির সরণও শূন্য (x মিটারে এবং t সেকেন্ডে প্রকাশিত)।

এখানে,

$$t = \sqrt{x} + 5$$

বা, $\sqrt{x} = t - 5$

বা, $x = (t-5)^2 = t^2 - 10t + 25$

$\therefore$ কণাটির তাৎক্ষণিক বেগ,

$$v = \frac{dx}{dt} = 2t - 10$$

এখন, কণাটির বেগ শূন্য হলে আমরা পাই,

$$0 = 2t - 10$$

বা, $t = \frac{10}{2} = 5$ সেকেন্ড

$\therefore$ $t = 5$ সেকেন্ড সময়ে কণাটির সরণ, $x = t^2 - 10t + 25$

$$= (5)^2 - 10\times5 + 25 = 0$$

সুতরাং, কণাটির বেগ যখন শূন্য তখন কণাটির সরণও শূন্য। (প্রমাণিত)

৬। একটি গতিশীল বস্তু কর্তৃক অতিক্রান্ত দূরত্ব বস্তুটির তাৎক্ষণিক বেগ ও সময়ের গুণফলের অর্ধেকের সমান হলে দেখাও যে বস্তুটির ত্বরণ ধ্রুবক।

ধরা যাক,
বস্তুটির অতিক্রান্ত দূরত্ব, x
তাৎক্ষণিক বেগ, v
সময়, t

প্রশ্নানুসারে,

$$x = \frac{1}{2} vt$$

বা, $x = \frac{1}{2}\frac{dx}{dt}t \quad \left[\because v = \frac{dx}{dt}\right]$

বা, $\frac{dx}{x} = \frac{2dt}{t}$

উভয় পার্শ্ব সমাকলন করে পাই,

$$\int \frac{dx}{x} = 2\int \frac{dt}{t}$$

বা, $\ln x = 2\ln t + \ln k$ $\quad (k = \text{ধ্রুবক})$

বা, $\ln x - 2\ln t = \ln k$

বা, $\ln x - \ln t^2 = \ln k$

বা, $\ln\left(\frac{x}{t^2}\right) = \ln k$

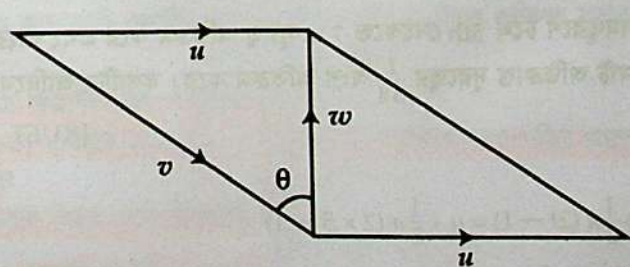
বা, $\frac{x}{t^2} = k$ বা, $x = kt^2$

এখন, বস্তুটির বেগ, $v = \frac{dx}{dt} = 2kt$

এবং ত্বরণ, $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(2kt)$

$= 2k$ (ধ্রুবক)। প্রমাণিত

৭। স্থির পানিতে একটি নৌকার বেগ ঘণ্টায় 5 km। নৌকাটি 15 min-এ 1 km চওড়া নদী আড়াআড়িভাবে অতিক্রম করে। নদীর স্রোতের বেগ কত ?



নৌকাটি আড়াআড়িভাবে 15 min অর্থাৎ $\frac{1}{4}$ ঘণ্টায় 1 km দূরত্ব অতিক্রম করে।

সুতরাং, নৌকার লব্ধি বেগের মান, $w = \frac{1}{1/4} = 4\ \text{km hr}^{-1}$

স্থির পানিতে নৌকার বেগ, $\vec{v}$ এবং স্রোতের বেগ, $\vec{u}$ হলে চিত্র থেকে পাই,

$v^2 = u^2 + w^2$

বা, $u^2 = v^2 - w^2$

$\therefore u = \sqrt{v^2 - w^2} = \sqrt{(5)^2 - (4)^2}$

$= 3\ \text{km hr}^{-1}$

৮। 3·0 kg ভরের একটি হাতুড়ি 6 m উঁচু থেকে একটি লৌহদণ্ডের ওপর পড়ল এবং 0·1 s সময়ে স্থির হলো। লৌহদণ্ডের ওপর প্রযুক্ত বল নির্ণয় কর। ($g = 9·8\ ms^{-2}$)

এখানে,
হাতুড়ির ভর, $m = 3·0\ kg$
দূরত্ব, $s = 6\ m$
সময়, $t = 0·1\ s$
দণ্ডের ওপর প্রযুক্ত বল, $F = ?$
$g = 9·8\ ms^{-2}$

হাতুড়ির উল্লম্ব গতির সময় এর প্রাথমিক বেগ, $u = 0$
হাতুড়ির ওপর পড়ার মুহূর্তে হাতুড়ির বেগ v হলে,
আমরা পাই,

$$v^2 = u^2 + 2as$$

বা, $v^2 = 0 + 2 \times 9·8 \times 6 = 117·6$

$\therefore\ v = \sqrt{117·6} = 10·84\ ms^{-1}$

অতএব, হাতুড়ির গতির জন্য লৌহদণ্ডের ওপর প্রযুক্ত বল,

$$F = \frac{\text{ভরবেগের পরিবর্তন}}{\text{সময়}} = \frac{m(v-u)}{t}$$

$$= \frac{3 \times (10·84 - 0)}{0·1} = 325\ N$$

$\therefore$ লৌহদণ্ডের ওপর প্রযুক্ত মোট বল $= F +$ হাতুড়ির ওজন

$= F + mg = 325 + 3 \times 9·8 = 325 + 29·4$
$= 354·4\ N$

৯। বিমানবন্দরের রানওয়ের দৈর্ঘ্য 100 m। একটি উড়োজাহাজ উড়ার পূর্ব মুহূর্তে 216 km/hr গতিসম্পন্ন হতে হয়। উড়োজাহাজটি 15 m/s² ত্বরণে ত্বরান্বিত হলে রানওয়ে থেকে উড়তে সক্ষম হবে কী ? রানওয়ের দৈর্ঘ্য সর্বনিম্ন কত হলে উড়োজাহাজটি উড়তে পারবে ? [BUET Admission Test, 2013-14]

এখানে,
$v = 216\ km/h = 60\ ms^{-1}$
$a = 15\ ms^{-2}$

আমরা জানি,

$$S = \frac{v^2}{2a} = \frac{(60)^2}{2 \times 15}$$

$$= 120\ m$$

$\therefore\ 100\ m < 120\ m$

সুতরাং, উড়োজাহাজটি উড়তে সক্ষম হবে না। রানওয়ের দৈর্ঘ্য সর্বনিম্ন 120 m হলে উড়োজাহাজটি উড়তে পারবে।

১০। একটি কণা সমত্বরণে চলে 5th সেকেন্ডে 7 m দূরত্ব অতিক্রম করে এবং আরো কিছু দূর গিয়ে থেমে যায়। কণাটি শেষতম সেকেন্ডে মোট অতিক্রান্ত দূরত্বের $\frac{1}{64}$ অংশ অতিক্রম করে। কণাটির আদিবেগ, ত্বরণ ও মোট সময় নির্ণয় কর। [KUET Admission Test, 2006-07]

আমরা জানি,

$$S_{th} = 7 = u + \frac{1}{2}a(2t-1) = u + \frac{1}{2}a(2 \times 5 - 1)$$

$$= u + \frac{9}{2}a \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (i)$$

আবার,

$$v = 0 = u + at \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (ii)$$

মোট সময় t হলে,

$$S_{th} = u + \frac{1}{2}a(2t-1) = \frac{1}{64}\left(ut + \frac{1}{2}at^2\right)$$

বা, $u + at - \frac{1}{2}a = \frac{1}{64}ut + \frac{1}{128}at^2$

বা, $0 - \frac{1}{2}a = \frac{t}{64}\left(u + \frac{1}{2}at\right) = \frac{t}{64}\left(u + at - \frac{1}{2}at\right)$ $[\because u + at = 0]$

বা, $0 - \frac{1}{2}a = \frac{t}{64}\left(0 - \frac{1}{2}at\right)$

বা, $\frac{a}{2} = \frac{at^2}{128}$

বা, $t^2 = 64 \therefore t = 8 \text{ s}$

সুতরাং, মোট সময়, $t = 8 \text{ s}$

(ii) নং থেকে পাই,

$u + at = 0$

$u = -8a$

এখন, (i) নং থেকে $-8a + \frac{9}{2}a = 7$ বা, $-7a = 14$

$\therefore a = -2 \text{ ms}^{-2}$

$\therefore$ কণাটির ত্বরণ, $a = -2 \text{ ms}^{-2}$

(ii) নং থেকে $u = -8a = -8 \times (-2) = 16 \text{ ms}^{-1}$

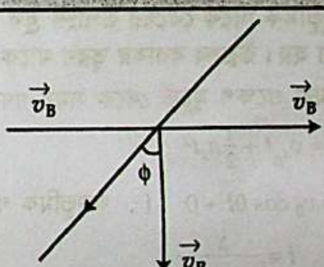
অতএব, কণাটির আদিবেগ, $u = 16 \text{ ms}^{-1}$

উত্তর : কণাটির আদিবেগ 16 ms^{-1}; ত্বরণ -2 ms^{-2} এবং মোট সময় 8 s।

অনুসন্ধানমূলক কাজ : বৃষ্টির দিনে চলন্ত বাসে বসে থাকা একজন যাত্রীর নিকট উল্লম্বভাবে পতনশীল বৃষ্টির পানি তির্যকভাবে পড়ছে মনে হয় কেন ?

বৃষ্টির বেগ v_R এবং বাসের বেগ $\vec{v}_B$ হলে যাত্রী সাপেক্ষে বৃষ্টির বেগ হবে, $\vec{v}_{RB} = \vec{v}_R - \vec{v}_B$। $\vec{v}_{RB}$ ভেক্টরটি উল্লম্ব রেখার সাথে ϕ কোণে আনত থাকলে, $\tan\phi = \frac{v_B}{v_R}$।

অর্থাৎ, বাসটি চলতে থাকলে বাসের যাত্রীর নিকট উল্লম্বভাবে পতনশীল বৃষ্টি তির্যকভাবে পড়ছে মনে হবে।



প্রাস (Projectile)

ভূপৃষ্ঠ থেকে বা ভূপৃষ্ঠের কাছাকাছি কোনো বিন্দু থেকে যে কোনো দিকে প্রক্ষিপ্ত বস্তুকে প্রাস বলে।

জানা দরকার :

- প্রাসের ওপর একমাত্র ক্রিয়াশীল বল অভিকর্ষ বল;
- প্রাসের সর্বাধিক উচ্চতা পৃথিবীর ব্যাসার্ধের তুলনায় নগণ্য। তাই প্রাসের গতির আলোচনায় অভিকর্ষজ ত্বরণের মান স্থির ধরে নেওয়া হয়, এবং
- প্রাসের গতি আলোচনায় বায়ুর বাধা উপেক্ষণীয়।

প্রাসের গতি সংক্রান্ত কয়েকটি সংজ্ঞা

প্রক্ষেপণ বিন্দু (Point of projection) : যে বিন্দু দিয়ে প্রাস প্রক্ষিপ্ত হয় সেই বিন্দুকেই প্রক্ষেপণ বিন্দু বলা হয়।

প্রক্ষেপণ পথ (Trajectory) : যে বক্রপথে প্রাসের গতি হয় তাকেই প্রাসের প্রক্ষেপ পথ বলা হয়।

প্রক্ষেপণ বেগ (Velocity of projection) : যে প্রারম্ভিক বেগে প্রাস প্রক্ষিপ্ত হয় সেই বেগকে প্রক্ষেপণ বেগ বলে।

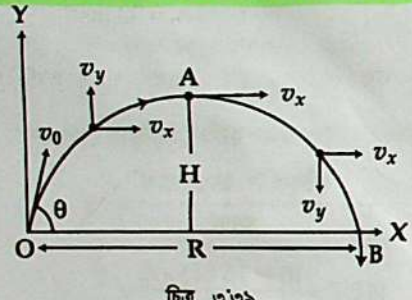
প্রক্ষেপণ কোণ (Angle of projection) : অনুভূমিক তলের সঙ্গে যে কোণে প্রাস প্রক্ষিপ্ত হয় তাকেই বলা হয় প্রক্ষেপণ কোণ।

প্রক্ষেপণ সীমা বা পাল্লা (Horizontal range or range) : প্রক্ষেপণ বিন্দুগামী অনুভূমিক তলের ওপর প্রক্ষিপ্ত বস্তুটি যে বিন্দুতে পতিত হয় প্রক্ষেপণ বিন্দু থেকে ওই বিন্দুর দূরত্বকে প্রাসের প্রক্ষেপণ সীমা বলা হয়।

উড্ডয়নকাল (Time of flight) : প্রক্ষেপণ বিন্দু থেকে প্রক্ষেপণ বিন্দুগামী অনুভূমিক তলের ওপর এসে পড়তে প্রাসটির যে সময় লাগে তাকে উড্ডয়নকাল বলে। একে **চলনকাল**ও বলা হয়।

৩.৮ প্রক্ষেপণ গতি
Projectile Motion

তুমি যদি স্টেডিয়ামে কখনও ক্রিকেট খেলা দেখতে যাও তাহলে বাউন্ডারি থেকে ছোঁড়া ক্রিকেট বলের গতি লক্ষ করলে দেখবে বলটি প্রথমে ভূমি থেকে ওপরে উঠে পুনরায় বাঁকা পথে ভূমিতে ফিরে আসে। আবার বন্দুক থেকে উপরের দিকে ছোঁড়া বুলেটের গতি, নিক্ষিপ্ত তীর বা বর্শার গতি, বিমান থেকে নিক্ষিপ্ত বোমার গতি সকল ক্ষেত্রে একই প্রকার গতিপথ লক্ষ করা যায়।এই ধরনের বক্রগতিকে প্রাসের গতি বলে এবং গতিপথকে প্রক্ষেপণ (trajectory) বলে। ইহা একটি অধিবৃত্ত। এ ধরনের গতি দ্বিমাত্রিক গতি। বাতাসের বাধা উপেক্ষা করলে প্রাসের গতি কেবলমাত্র অভিকর্ষের ক্রিয়ায় হয়। প্রাসের গতিপথ সর্বদা প্যারাবোলা বা অধিবৃত্ত হয়। প্রাস সর্বোচ্চ উচ্চতায় পৌঁছালে এর বেগ সর্বনিম্ন (শূন্য) হয়। আবার সর্বাধিক উচ্চতায় প্রাসের গতি একমাত্রিক হয়। প্রাস প্রক্ষেপণ বিন্দু হতে অনুভূমিক দিকে সর্বাধিক যে দূরত্ব অতিক্রম করে তাকে প্রাসের পাল্লা (Range) বলে। নিক্ষেপণ কোণ 45° হলে প্রাসের পাল্লা সর্বাধিক হয়। অনুভূমিক বরাবর প্রাসের ত্বরণ, $a_x = 0$, উল্লম্ব বরাবর প্রাসের ত্বরণ, $a_y = -g$ হয়। প্রাসের সর্বাধিক উচ্চতায় বেগ ও ত্বরণের মধ্যবর্তী কোণ 90° হয়। প্রক্ষেপণ বিন্দুতে প্রাসের মূলবিন্দুর স্থানাঙ্ক $x = 0, y = 0$ হয়। মনে কর O বিন্দু হতে θ কোণে একটি প্রাসকে v_0 আদিবেগে ওপরের দিকে নিক্ষেপ করা হলো [চিত্র ৩.৩৯]। প্রাসের প্রাথমিক বেগ v_0 কে দুটি উপাংশে বিভক্ত করা যায়। একটি উপাংশ OX বরাবর, অপর উপাংশ OY বরাবর। উপাংশ দুটি হলো $v_{x_0} = v_0 \cos\theta$ এবং $v_{y_0} = v_0 \sin\theta$। উল্লেখ্য অনুভূমিক দিকে ত্বরণ না থাকায় অনুভূমিক দিকে বেগের উপাংশ ধ্রুব থাকে। সর্বাধিক উচ্চতায় প্রাসের গতি একমাত্রিক হয় এবং বেগের উল্লম্ব উপাংশ শূন্য হয়। উল্লম্ব বরাবর ত্বরণ থাকে তাই বেগের উপাংশ পরিবর্তিত হয়।



চিত্র ৩.৩৯

আমরা প্রক্ষেপ মুহূর্ত থেকে সময় গণনা করতে পারি। অর্থাৎ $t = 0$ সময়ে অতিক্রান্ত দূরত্ব x হলে গতির সমীকরণ অনুযায়ী $x = v_{x_0}t + \frac{1}{2}a_x t^2$

$x = v_0 \cos\theta t + 0$ [∵ অনুভূমিক গতি $v_{x0} = v_0 \cos\theta$]

$$\therefore \quad t = \frac{x}{v_0 \cos\theta} \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (3.32)$$

আবার $a_x = -g$ হওয়ায় t সময় পর উল্লম্ব দিকে প্রাসের বেগ বা উল্লম্ব গতি

$$v_y = v_{y_0} - gt = v_0 \sin\theta - gt \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (3.33)$$

t সময় পর প্রাস যদি y উচ্চতায় আরোহণ করে, তবে

$$y = v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2 = v_0 \sin\theta\, t - \frac{1}{2}gt^2 \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (3.34)$$

t সময়ে লব্ধি বেগ, $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

লব্ধি বেগ অনুভূমিক দিকের সাথে α কোণ করলে, $\tan\alpha = \frac{v_y}{v_x}$

t এর মান (3.34) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই

$$y = v_0 \sin\theta \times \frac{x}{v_0 \cos\theta} - \frac{1}{2}g \times \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\theta}$$

$$y = (\tan\theta)x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\theta}x^2$$

$$y = ax - bx^2 \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (3.35)$$ ইহা একটি প্যারাবোলা বা অধিবৃত্তের সমীকরণ।

এখানে $a = \tan\theta$, $b = \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\theta}$

এই রাশি দুটি প্রক্ষেপ পথে ধ্রুব থাকে। সুতরাং প্রাসের গতিপথ একটি প্যারাবোলা।

অনুধাবনমূলক কাজ : খাড়া ওপরের দিকে নিক্ষিপ্ত বস্তুর অনুভূমিক দূরত্ব শূন্য হয় কেন ?

গাণিতিক উদাহরণ ৩.৬

১। অনুভূমিকের সাথে 30° কোণ করে ভূপৃষ্ঠ হতে 40 ms^{-1} বেগে শত্রুপক্ষের একটি বিমানের দিকে একটি কামানের গোলা নিক্ষেপ করা হলো। গোলাটি 30 m দূরে অবস্থিত একটি দেয়ালকে কত উচ্চতায় কত সময় পর আঘাত করবে ?

মনে করি গোলাটি y উচ্চতায় দেওয়ালকে আঘাত করে।

আদিবেগের অনুভূমিক উপাংশ,

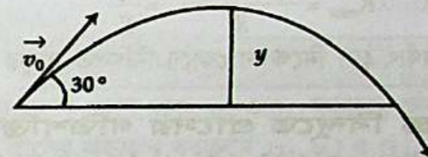
$$v_{x0} = v_0 \cos 30° = 40 \cos 30° = 34{\cdot}641 \text{ ms}^{-1}$$

এখানে,
নিক্ষেপ কোণ, $\theta = 30°$
আদিবেগ, $v_0 = 40 \text{ ms}^{-1}$
উচ্চতা, $y = ?$

অনুভূমিক দিকে ত্বরণ না থাকার কারণে বেগের উপাংশ অপরিবর্তিত থাকবে। ধরি t সময় পর গোলাটি 30 m দূরের দেওয়ালকে আঘাত করে।

$\therefore \quad v_{x0}t = 30$

বা, $t = \dfrac{30}{34{\cdot}641} = 0{\cdot}866 \text{ sec}$



আদিবেগের উল্লম্ব উপাংশ,

$$v_{y0} = 40 \sin 30° = 20 \text{ ms}^{-1}$$

t সময় পর উল্লম্ব সরণ,

$$y = v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2 = 20 \times 0{\cdot}866 - \frac{1}{2} \times 9{\cdot}8 \times (0{\cdot}866)^2 = 13{\cdot}645 \text{ m}$$

বি. দ্র. X ও Y অক্ষের দূরত্ব একসাথে ব্যবহার হলে, $y = (\tan\theta)x - \dfrac{9x^2}{2v_0^2\cos^2\theta}$ সূত্র প্রয়োগেও অঙ্ক করা যাবে।

সর্বাধিক উচ্চতা (H) : সর্বোচ্চ বিন্দু A-তে বেগের উল্লম্ব উপাংশের মান শূন্য হয় অর্থাৎ $v_y = 0$ হয়; সেক্ষেত্রে (3.33) সমীকরণ থেকে $v_0 \sin\theta - gt = 0$, $t = \dfrac{v_0 \sin\theta}{g}$ ... ... (3.36)

(3.34) নং সমীকরণে $y = H$ এবং t এর মান বসিয়ে পাওয়া যায়

$$H = v_0 \sin\theta \times \left(\frac{v_0 \sin\theta}{g}\right) - \frac{1}{2}\frac{g v_0^2 \sin^2\theta}{g^2}$$

$$= \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{g} - \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g}$$

$$= \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{g}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g}$$

$$\therefore \quad H = \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3.37)$$

জেনে রাখ : খাড়াভাবে ওপরে নিক্ষিপ্ত বস্তুর ক্ষেত্রে সর্বাধিক উচ্চতা, $H = \dfrac{v_0^2}{2g}$

সর্বাধিক উচ্চতায় পৌঁছাবার সময় : সর্বাধিক উচ্চতায় $v_y = 0$ এবং $t = t_m$ হলে $v_y = v_0 \sin\theta - gt$ সমীকরণে মান বসিয়ে পাওয়া যায়, $0 = v_0 \sin\theta - gt_m$ বা, $t_m = \dfrac{v_0 \sin\theta}{g}$.

বিচরণ কাল (T) : এক্ষেত্রে উঠা এবং নামার জন্য $y = 0$ হয়

ফলে (3.34) নং সমীকরণ থেকে $v_0 \sin\theta t - \dfrac{1}{2}gt^2 = 0$

$$\therefore \quad t\left(v_0 \sin\theta - \frac{1}{2}gt\right) = 0 \text{ অথবা } t = 0 \quad \therefore \ t = \frac{2v_0 \sin\theta}{g}$$

$t = 0$ হলে প্রাসের প্রাথমিক অবস্থা 0-কে নির্দেশ করে। অতএব বিচরণ কাল $t = T$ বসিয়ে পাই

$$T = \frac{2v_0 \sin\theta}{g} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3.38)$$

জেনে রাখ : খাড়াভাবে ওপরে নিক্ষিপ্ত বস্তুর উত্থান-পতন বা বিচরণকাল, $T = \dfrac{2v_0}{g}$

প্রক্ষেপণ সীমা বা পাল্লা (R) : অনুভূমিক দিকে OB = পাল্লা = R

অতএব পাল্লা, $R = v_{x_0}T = v_0 \cos\theta T = v_0 \cos\theta \times \frac{2v_0 \sin\theta}{g}$

$$= \frac{2v_0^2 \sin\theta \cos\theta}{g} \quad [\because 2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta]$$

$$\therefore \quad R = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\theta \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3.39)$$

সর্বাধিক পাল্লা (R_{max}) :

v_0 এর যেকোনো প্রদত্ত মানে R সর্বাধিক হয় যখন $\sin 2\theta = 1$ বা $2\theta = 90°$ হয় বা $\theta = 45°$ হয়।

$$\therefore \quad R_{max} = \frac{v_0^2 \sin 90°}{g} = \frac{v_0^2}{g}$$

অর্থাৎ 45° নিক্ষেপণ কোণে নিক্ষিপ্ত বস্তুর পাল্লা সর্বাধিক।

সর্বোচ্চ বিন্দুতে প্রাসের গতিশক্তি ও স্থিতিশক্তি
Kinetic energy and potential energy of a projectile at the highest point

(i) সর্বোচ্চ বিন্দুতে প্রাসের গতিশক্তি : প্রাসের গতিপথের সর্বোচ্চ বিন্দুতে এর গতিশক্তি সর্বনিম্ন হয়। এই বিন্দুতে প্রাসের শুধুমাত্র অনুভূমিক বেগ $v_{0x} = v_0 \cos\theta$ থাকে এবং উল্লম্ব বেগ শূন্য হয়। সুতরাং

$$E_k = \frac{1}{2}mv_{0x}^2 = \frac{1}{2}mv_0^2\cos^2\theta \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (i)$$

(ii) সর্বোচ্চ বিন্দুতে প্রাসের স্থিতিশক্তি : সর্বোচ্চ বিন্দুতে প্রাসের স্থিতিশক্তি সর্বাধিক হয়। এই স্থিতিশক্তি,

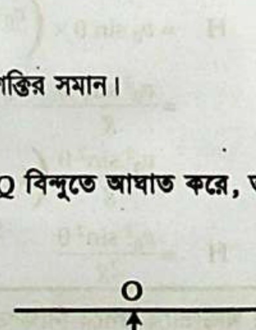
$$E_p = mgh = mg \times \frac{v_0^2\sin^2\theta}{2g} = \frac{1}{2}mv_0^2\sin^2\theta \quad \ldots \quad (ii)$$

অতএব, মোট শক্তি, $E_k + E_p = \frac{1}{2}mv_0^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)$

$= \frac{1}{2}mv_0^2$; এই শক্তি প্রাসের প্রাথমিক মোট শক্তির সমান।

গাণিতিক উদাহরণ ৩.৭

১। যদি ভূমি থেকে O বিন্দুর উচ্চতা H এবং t সময় পরে বস্তুটি ভূমির Q বিন্দুতে আঘাত করে, তবে দেখাও যে প্রক্ষেপণ সীমা, $R = v_0\sqrt{\frac{2H}{g}}$



আমরা জানি,

$$H = 0 \times t + \frac{1}{2}gt^2 \quad [\because y = v_{y0}t + \frac{1}{2}gt^2]$$

বা, $t^2 = \frac{2H}{g}$ বা, $t = \sqrt{\frac{2H}{g}}$

$$\therefore \quad R = v_0 t = v_0\sqrt{\frac{2H}{g}}$$

২। 1·25 m উচ্চতাবিশিষ্ট একটি অনুভূমিক টেবিলের এক প্রান্ত দিয়ে একটি বল গড়িয়ে পড়ল। টেবিল থেকে পড়ার মুহূর্তে বলটির বেগ 3 ms⁻¹ হলে বলটি টেবিলের নিম্ন প্রান্ত থেকে কত দূরে গিয়ে পড়বে ?

আমরা জানি, প্রক্ষেপণ সীমা,

$$R = v_0\sqrt{\frac{2H}{g}}$$

$$\therefore \quad R = 3 \times \sqrt{\frac{2 \times 1.25}{9.8}}$$

$$= 2 \times 0.5 = 1.5 \text{ m}$$

এখানে,
$v_0 = 3 \text{ ms}^{-1}$
$H = 1.25 \text{ m}$
$g = 9.8 \text{ ms}^{-2}$

অনুসন্ধানমূলক কাজ : দুটি একই প্রক্ষেপণ বেগের প্রাসের ক্ষেত্রে প্রক্ষেপণ কোণ θ ও θ ± 90° হলে, দেখাও যে, এই দুই ক্ষেত্রে প্রক্ষেপণ সীমা সমান; কিন্তু বিপরীতমুখি।

দুটি প্রাসের প্রক্ষেপণ সীমা R_1 ও R_2 হলে লেখা যায়,

$$R_1 = \frac{u^2 \sin 2\theta}{g} \text{ এবং } R_2 = \frac{u^2 \sin 2(90° \pm \theta)}{g} = \frac{u^2 \sin^2(180° \pm 2\theta)}{g}$$

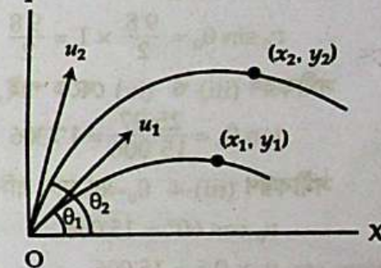
$$\therefore \quad R_2 = \mp \frac{u^2 \sin 2\theta}{g}$$

$$\therefore \quad R_1 = \mp R_2$$

সুতরাং, এই দুই ক্ষেত্রে প্রক্ষেপণ সীমা সমান, কিন্তু বিপরীতমুখি।

কাজ : একটি প্রাসের সাপেক্ষে অন্য একটি প্রাসের গতিপথ সরলরেখা। — ব্যাখ্যা কর।

ধরা যাক, u_1 ও θ_1 একটি প্রাসের যথাক্রমে প্রক্ষেপণ বেগ ও প্রক্ষেপণ কোণ এবং u_2 ও θ_2 যথাক্রমে অন্য একটি প্রাসের প্রক্ষেপণ বেগ ও প্রক্ষেপণ কোণ। t সময় পরে প্রথম ও দ্বিতীয় প্রাসের অবস্থান যথাক্রমে (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) হলে,



$$x_1 = (u_1 \cos\theta_1)\, t$$

$$y_1 = (u_1 \sin\theta_1)\, t - \frac{1}{2} g t^2$$

এবং $x_2 = (u_2 \cos\theta_2)\, t$

$$y_2 = (u_2 \sin\theta_2)\, t - \frac{1}{2} g t^2$$

এখন, প্রথম প্রাসের সাপেক্ষে দ্বিতীয় প্রাসের অবস্থান (x, y) হলে,

$$x = x_2 - y_1 = t(u_2 \cos\theta_2 - u_1 \cos\theta_1)$$

এবং $y = y_2 - y_1 = t\,(u_2 \sin\theta_2 - u_1 \sin\theta_1)$

$$\therefore \quad \frac{y}{x} = \frac{u_2 \sin\theta_2 - u_1 \sin\theta_1}{u_2 \cos\theta_2 - u_1 \cos\theta_1} = K = \text{ধ্রুবক (ধরি)}$$

$\therefore \quad y = Kx$, এটি একটি সরলরেখার সমীকরণ।

সুতরাং, একটি প্রাসের সাপেক্ষে অন্য একটি প্রাসের গতিপথ সরলরেখা।

গাণিতিক উদাহরণ ৩.৮

১। 49 ms⁻¹ বেগে ভূমির সাথে 60° কোণে একটি বস্তুকে শূন্যে নিক্ষেপ করা হলো। এটা সর্বোচ্চ কত ওপরে উঠবে ? এতে কত সময় লাগবে ? কত সময় পর এটা ভূমিতে পতিত হবে ? এর অনুভূমিক পাল্লা কত হবে ?

এখানে,
নিক্ষেপণ বেগ, $v_0 = 49 \text{ ms}^{-1}$
নিক্ষেপণ কোণ, $\theta = 60°$
অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g = 9.8 \text{ ms}^{-2}$

সর্বাধিক উচ্চতা

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g} = \frac{(49)^2 \times (\sin 60°)^2}{2 \times 9.8} = 91.87 \text{ m}$$

সর্বোচ্চ উচ্চতায় উঠতে t_m সময় লাগলে

$$t_m = \frac{v_0 \sin\theta}{g} = \frac{49 \times \sin 60°}{9.8} = 4.33 \text{ sec}$$

ভূমিতে আসার সময় T হলে

$$T = \frac{2v_0 \sin\theta}{g} = \frac{2 \times 49 \times \sin 60°}{9.8} = 8.66 \text{ s}$$

পাল্লা, $R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g} = \frac{(49)^2 \times \sin(2 \times 60°)}{9.8} = 212.18 \text{ m}$

উত্তর : সর্বোচ্চ উচ্চতা 91.87 m; সর্বোচ্চ উচ্চতায় উঠতে সময় লাগবে 4.33 sec; ভূমিতে পতিত হতে সময় লাগবে 8.66 s; অনুভূমিক পাল্লা 212.18 m.

২। একটি প্রাসের অনুভূমিক পাল্লা 79·53 m এবং বিচরণকাল 5·3 sec। নিক্ষেপণ বেগ ও নিক্ষেপণ কোণ নির্ণয় কর। [ঢা. বো. ২০১০; চ. বো. ২০০৯, ২০০৪]

আমরা জানি,

$$T = \frac{2v_0 \sin\theta_0}{g} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (i)$$

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g} = \frac{v_0^2\, 2\sin\theta_0 \cos\theta_0}{g} \quad \ldots \quad \ldots \quad (ii)$$

এখানে,
$R = 79·53$ m
$T = 5.3$ sec
$g = 9·8$ ms^{-2}

সমীকরণ (i) ও (ii) থেকে পাই, $\frac{T}{R} = \dfrac{\frac{2v_0 \sin\theta_0}{g}}{\frac{v_0^2\, 2\sin\theta_0\cos\theta_0}{g}}$

বা, $\frac{5·3}{79·53} = \frac{1}{v_0 \cos\theta_0}$

বা, $v_0 \cos\theta_0 = 15·006 \quad \ldots \quad \ldots \quad (iii)$

সমীকরণ (i) থেকে পাই,

$$T = \frac{2\, v_0 \sin\theta_0}{9·8}$$

$$\therefore \quad v_0 \sin\theta_0 = \frac{9·8}{2} \times T = \frac{9·8}{2} \times 5·3 = 25·97 \quad \ldots \quad (iv)$$

সমীকরণ (iii) ও (iv) থেকে পাই,

$$\tan\theta_0 = \frac{25·97}{15·006} = 1·7306 \qquad \therefore \quad \theta_0 = 60°$$

সমীকরণ (iii)-এ θ_0-এর মান বসিয়ে পাই,

$$v_0 \cos 60° = 15·006$$
$$v_0 \times 0·5 = 15·006$$
$$\therefore \quad v_0 = \frac{15·006}{0·5} = 30 \text{ ms}^{-1}$$

উত্তর : নিপেক্ষণ বেগ 30 ms^{-1}; নিক্ষেপণ কোণ 60°।

৩। 30 m উচ্চতার কোনো স্তম্ভ হতে একটি প্রক্ষিপ্ত বস্তুকে 20 ms^{-1} বেগে অনুভূমিকের সাথে 20° কোণে ওপরের দিকে নিক্ষেপ করা হলো। বস্তুটির বিচরণকাল নির্ণয় কর। [ব. বো. ২০১০]

আমরা জানি,

$$y - y_0 = v_0 \sin\theta t - \frac{1}{2} g t^2$$

বা, $-30 = (20 \times \sin 30)\, t - \frac{1}{2} \times 9·8 \times t^2$

বা, $4·9t^2 - 10\,t - 30 = 0$

বা, $t = \dfrac{-(-10) \pm \sqrt{(100)^2 - 4 \times 4·9 \times (-30)}}{2 \times 4·9}$

$t = 3·1$ sec বা, $t = -1·7$ sec

t এর $-$ve মান গ্রহণযোগ্য নয়

$\therefore \quad t = 3·1$ sec

৪। অনুভূমিকের সাথে 30° কোণ করে ভূপৃষ্ঠ থেকে 40 ms^{-1} বেগে একটি বুলেট ছোঁড়া হলো। বুলেটটি 30 m দূরে অবস্থিত একটি দেওয়ালকে কত উচ্চতায় আঘাত করবে ?

আমরা জানি,

$$y = x \tan\theta - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2\theta}$$

$$= 30 \times \tan 30° - \frac{9·8 \times (30)^2}{2 \times (40)^2 \times \cos^2 30°}$$

$$= 17·32 - 3·68 = 13·64 \text{ m}$$

এখানে,
$x = 30$ m
$v_0 = 40$ ms^{-1}
$\theta = 30°$

৫। v_0 প্রক্ষেপ বেগে ছোঁড়া একটি প্রাসের অর্জিত সর্বাধিক উচ্চতা H ও প্রক্ষেপণ সীমা R হলে দেখাও যে,

$$R^2 = 16\,H\left(\frac{u^2}{2g} - H\right).$$

আমরা জানি,

প্রাসের সর্বাধিক উচ্চতা, $H = \frac{u^2 \sin^2\theta}{2g}$ [এখানে θ হলো প্রক্ষেপণ কোণ]

এবং প্রক্ষেপণ সীমা, $R = \frac{u^2 \sin 2\theta}{g}$

$$\text{এখন, } \frac{R^2}{H} = \frac{\frac{(u^2\sin 2\theta)^2}{g^2}}{\frac{u^2\sin^2\theta}{2g}} = \frac{(u^2\sin 2\theta)^2 \times 2g}{u^2\sin^2\theta \times g^2}$$

$$= \frac{(u^2\, 2\sin\theta\cos\theta)^2 \times 2}{u^2\sin^2\theta \times g} = \frac{u^4 \times 4\sin^2\theta\cos^2\theta \times 2}{u^2\sin^2\theta \times g}$$

$$= \frac{u^2 \times 8\cos^2\theta}{g} = \frac{16u^2\cos^2\theta}{2g}$$

$$= \frac{16u^2(1-\sin^2\theta)}{2g} = 16\left(\frac{u^2}{2g} - \frac{u^2\sin^2\theta}{2g}\right)$$

$$R^2 = 16\,H\left(\frac{u^2}{2g} - H\right) \text{ (প্রমাণিত)}$$

৬। দুটি বস্তুকে একই বেগে ভূমি থেকে প্রক্ষেপ করা হলো। এর একটির প্রক্ষেপণ কোণ 60° এবং অপরটির 30°। দেখাও যে এদের সর্বোচ্চ উচ্চতার অনুপাত 3 : 1।

60° কোণে প্রক্ষিপ্ত বস্তুর সর্বোচ্চ উচ্চতা H_1 হলে,

$$H_1 = \frac{u_0^2\sin^2 60°}{2g}$$

এখানে v_0 প্রক্ষিপ্ত বস্তুর প্রক্ষেপণ বেগ এবং 30° কোণে প্রক্ষিপ্ত বস্তুর সর্বোচ্চ উচ্চতা H_2 হলে,

$$H_2 = \frac{v_0^2\sin^2 30°}{2g}$$

$$\text{এখন, } \frac{H_1}{H_2} = \frac{\frac{v_0^2\sin^2 60°}{2g}}{\frac{v_0^2\sin^2 30°}{2g}} = \frac{\sin^2 60°}{\sin^2 30°}$$

$$= \frac{3/4}{1/4} = \frac{3\times4}{1\times4} = 3$$

$$\therefore\quad H_1 : H_2 = 3 : 1$$

৭। একটি ক্রিকেট বলের ওজন 0·65 kg। একজন ফিল্ডার বলটিকে স্বল্পতম সময়ে 100 m দূরত্বে থাকা উইকেট রক্ষকের কাছে পৌঁছাতে চাইলে ন্যূনতম কত km/h গতিতে বলটি ছুড়তে হবে ? এই গতিতে ছুড়লে কতক্ষণ পর তা উইকেট রক্ষকের কাছে গিয়ে পৌঁছাবে ? [BUET Admission Test, 2017-18]

আমরা জানি, অনুভূমিক দূরত্ব,

$$R = \frac{v^2\sin 2\theta}{g}$$

$$v^2 = \frac{R\times g}{\sin 2\theta}$$

$\therefore \quad v = \sqrt{\frac{R \times g}{\sin 2\theta}} = \sqrt{100 \times 9{\cdot}8}$ [$\because v$ এর মান সর্বনিম্ন হবে যদি $\sin 2\theta = 1$ হয়]

$= 31{\cdot}30\ ms^{-1}$

$= 112{\cdot}7\ kmh^{-1}$

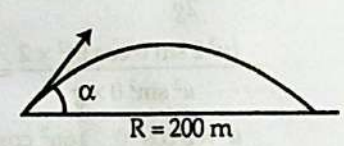
এবং $T = \frac{2v \sin\theta}{g}$

$= \frac{2 \times 31{\cdot}30 \times \sin 45°}{9{\cdot}8}$

$= 4{\cdot}52$ sec

৮। কোনো একটি বস্তুকে ভূপৃষ্ঠ হতে কত কোণে $45\ ms^{-1}$ বেগে ছুড়লে এটি $200\ m$ দূরে গিয়ে পড়বে ?
[BUET Admission Test, 2015-16]

আমরা জানি,



$R = \frac{v^2 \sin 2\alpha}{g}$

বা, $200 \times 9{\cdot}8 = (45)^2 \times \sin 2\alpha$

$\therefore \quad 2\alpha = 75{\cdot}44°$

$\alpha = 37{\cdot}72°$

কাজ : দেখাও যে, প্রাসের প্রক্ষেপণ সীমা সর্বাধিক হলে সর্বোচ্চ উচ্চতার মান সর্বাধিক প্রক্ষেপণ সীমার এক-চতুর্থাংশ হবে।

প্রাসের সর্বাধিক প্রক্ষেপণ সীমা, $R_{max} = \frac{v_0^2}{g}$

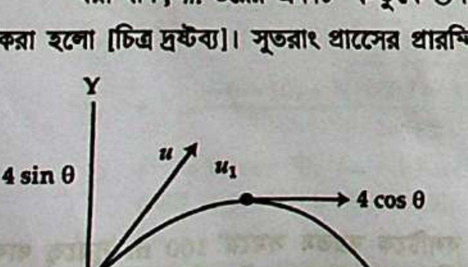
এবং সর্বোচ্চ উচ্চতা, $H = \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g}$ [এখানে, $\theta = 45°$]

$\therefore \quad H = \frac{v_0^2 (\sin 45°)^2}{2g} = \frac{v_0^2 \times 0{\cdot}5}{2g} = \frac{v_0^2}{4g}$

$= \frac{R_{max}}{4}$ (প্রমাণিত)

কাজ : দেখাও যে সর্বাধিক প্রক্ষেপণ সীমার ক্ষেত্রে সর্বোচ্চ অবস্থানে গতিশক্তি প্রাথমিক গতিশক্তির অর্ধেক হয়।

ধরা যাক, m ভরের একটি বস্তুকে O বিন্দু থেকে অনুভূমিক তলের সাথে θ কোণে u প্রারম্ভিক বেগে প্রক্ষেপ করা হলো [চিত্র দ্রষ্টব্য]। সুতরাং প্রাসের প্রারম্ভিক গতিশক্তি $E_0 = \frac{1}{2} m u_0^2$।



এখন সর্বোচ্চ অবস্থানে প্রাসের গতিশক্তি,

$E = \frac{1}{2} m (u \cos\theta)^2$, এখানে $u \cos\theta$ হচ্ছে সর্বোচ্চ বিন্দুতে প্রাসের অনুভূমিক গতিবেগ।

$\therefore \quad \frac{E}{E_0} = \cos^2\theta$

বা, $E = E_0 \cos^2\theta \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad$ (i)

এখানে, প্রক্ষেপণ কোণ 45° হলে,

$E = E_0 \cos^2 45°$

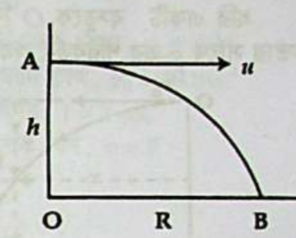
$\therefore \quad E = \frac{E_0}{2} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad$ (ii)

সুতরাং সর্বাধিক প্রক্ষেপণ সীমার ক্ষেত্রে, সর্বোচ্চ অবস্থানে গতিশক্তি প্রাথমিক গতিশক্তির অর্ধেক হয়।

অনুভূমিক প্রাস
Horizontal projectile

h উচ্চতা থেকে একটি বস্তুকে u বেগে অনুভূমিক দিকে নিক্ষেপ করা হলো। বস্তুটি মাটিকে B বিন্দুতে স্পর্শ করে। এক্ষেত্রে অনুভূমিক পাল্লা R হলে লেখা যায়,

$R = ut$, এখানে t হলো A বিন্দু হতে যাত্রা শুরু করে মাটি স্পর্শ করার সময়-কাল। একে প্রাসের উড্ডয়নকাল বলা যেতে পারে।



বস্তুটির উল্লম্ব নিম্নগতি বিবেচনা করে লেখা যায়,

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \quad \text{বা, } t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

[∵ এই বস্তুর ক্ষেত্রে বস্তুটির প্রাথমিক বেগ শূন্য]

t-এর মান বসিয়ে পাওয়া যায়,

$$R = u \times \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2hu^2}{g}}$$

$$\boxed{\therefore R = \sqrt{\frac{2hu^2}{g}}}$$

গাণিতিক উদাহরণ ৩.৯

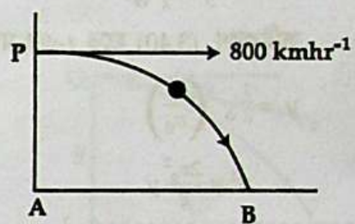
১। ভূপৃষ্ঠ থেকে 2000 m উঁচুতে একটি বোমারু বিমান ঘণ্টায় 800 km অনুভূমিক বেগে গতিশীল। ভূপৃষ্ঠে A বিন্দুর ওপর এসে বিমানটি একটি বোমা ফেলে দিল। বোমাটি ভূপৃষ্ঠে অবস্থিত B লক্ষ্যবস্তুতে আঘাত করল। AB দূরত্ব নির্ণয় কর।

ধরা যাক, P বিন্দুতে বোমাটি বিমান থেকে ফেলে দেওয়া হলো।

এখানে, $PA = 2000$ m

বোমাটির অনুভূমিক বেগ,

$$u = 800 \text{ kmhr}^{-1} = \frac{800 \times 1000}{60 \times 60} \text{ ms}^{-1} = 222.2 \text{ ms}^{-1}$$



বোমাটি ভূপৃষ্ঠে এসে পড়তে t সময় লাগলে বোমাটির উল্লম্ব গতির জন্য লেখা যায়,

$$2000 = \frac{1}{2}gt^2$$

$$\therefore \quad t = \sqrt{\frac{2 \times 2000}{9.8}} = 20.2 \text{ s}$$

এখন অনুভূমিক দিকে অভিকর্ষজ ত্বরণের উপাংশের মান শূন্য।

$$\therefore \quad AB = ut = 222.2 \times 20.2 = 4489 \text{ m}$$
$$= 4.489 \text{ km}$$

অনুসন্ধানমূলক কাজ : কয়েকটি বস্তুকে কোনো বিন্দু থেকে একই প্রক্ষেপণ বেগ u নিয়ে একই উল্লম্বতলে বিভিন্ন দিকে প্রক্ষেপ করা হলো। দেখাও যে, t সময় পর বস্তুগুলি একটি বৃত্তের পরিধির ওপর থাকবে।

ধরা যাক, কোনো একটি বস্তুকে θ প্রক্ষেপণ কোণে প্রক্ষেপ করা হলো। t সময় পরে বস্তুটির অবস্থান (x, y)।

সুতরাং, $x = (u \cos\theta)\, t \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad$ (i)

এবং $y = (u \sin\theta)\, t - \frac{1}{2} gt^2$

বা, $y + \frac{1}{2}gt^2 = (u \sin\theta)\, t \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad$ (ii)

সমীকরণ (i) ও (ii) কে বর্গ ও যোগ করে পাওয়া যায়,

$$x^2 + (y + \frac{1}{2}gt^2)^2 = (u^2 \sin^2\theta + u^2\cos^2\theta)\, t^2 = u^2t^2$$

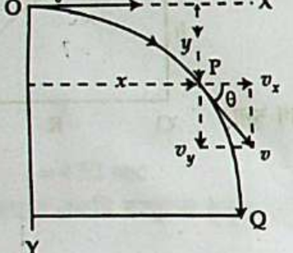
$\therefore \quad x^2 + (y + \frac{1}{2}gt^2)^2 = u^2t^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad$ (iii)

সমীকরণ (iii) একটি বৃত্তের সমীকরণ। এটি প্রক্ষেপণ কোণ θ-এর ওপর নির্ভরশীল নয়।

সুতরাং t সময় পরে বস্তুগুলি একটি বৃত্তের পরিধির ওপর থাকবে।

৩.৯ অনুভূমিকভাবে নিক্ষিপ্ত বস্তুর বা প্রাসের গতির সমীকরণ
Equation of motion of a horizontal projectile

ধরি একটি বস্তুকে O বিন্দু হতে v_0 বেগে অনুভূমিক দিকে নিক্ষেপ করা হলো [চিত্র ৩.৪০]। বায়ুর বাধা ও উচ্চতার সাথে g-এর পরিবর্তন অগ্রাহ্য করলে নিক্ষিপ্ত বস্তুর গতিপথের যে কোনো বিন্দুতে অনুভূমিক বেগ অভিন্ন এবং v_0 হবে। কিন্তু নিক্ষিপ্ত বস্তুর বেগের খাড়া উপাংশ না থাকায় অভিকর্ষীয় ত্বরণের দরুন খাড়া নিচের দিকে বস্তুর বেগ সময়ের সমানুপাতে বৃদ্ধি পাবে। ধরি t সেকেন্ড পরে বস্তুটি অনুভূমিক দিকে x দূরত্ব ও খাড়া নিচের দিকে y দূরত্ব অতিক্রম করে P বিন্দুতে এল এবং P বিন্দুতে বস্তুটির বেগ v ও v-এর অনুভূমিক ও উল্লম্ব অংশকের মান যথাক্রমে v_x ও v_y। তা হলে,



চিত্র ৩.৪০

$$v_x = v_0 = v\cos\theta \text{ ও}$$
$$v_y = 0 + gt = gt = v\sin\theta$$
$$\therefore \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

এখানে অনুভূমিকের সাথে v-এর কৌণিক ব্যবধান θ

$$\therefore \quad \tan\theta = \frac{v_y}{v_x}$$

আবার, $x = v_0 \times t$ ... ... (3.40) [∵ অনুভূমিক দিকে ত্বরণ = 0]

ও $y = \frac{1}{2}gt^2$ ... ... (3.41) [∵ উল্লম্ব দিকে আদি বেগ = 0]

সমীকরণ (3.40) হতে t-এর মান সমীকরণ (3.41)-এ বসিয়ে পাওয়া যায়—

$$y = \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0}\right)^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3.42)$$

$$\therefore \quad x^2 = \frac{2v_0^2}{g}y$$

উপরের সমীকরণে $\frac{2v_0^2}{g} = 4A$ বসিয়ে পাওয়া যায়,

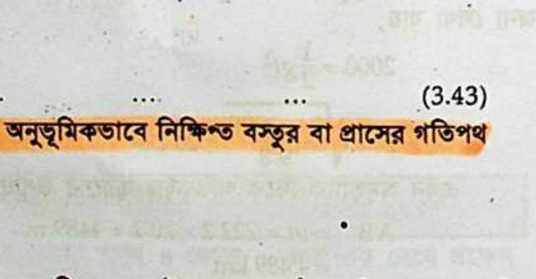
$$x^2 = 4Ay \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3.43)$$

এটি একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ। কাজেই **বাধাহীন পথে অনুভূমিকভাবে নিক্ষিপ্ত বস্তুর বা প্রাসের গতিপথ প্যারাবোলা (Parabola) বা অধিবৃত্ত রচনা করে।**

গাণিতিক উদাহরণ ৩.১০

১। ভূপৃষ্ঠ থেকে 490 m উঁচুতে একটি বিমান 147 ms^{-1} অনুভূমিক বেগে উড়ছে। ভূপৃষ্ঠে অবস্থিত কোনো বিন্দু A এর উপর উল্লম্ব অবস্থানে এসে সেটি একটি বস্তু ফেলে দিল। বস্তুটি ভূপৃষ্ঠে অবস্থিত B বিন্দুতে আঘাত করল। AB এর দূরত্ব কত ?

মনে করি O অবস্থানে বিমানটি থেকে বস্তুটিকে ফেলা হলো; অতএব OA = 490 m, t সময় পর বস্তুটি B বিন্দুতে আঘাত করল। উল্লম্ব দিকে বস্তুটির প্রাথমিক বেগ শূন্য।



$$\therefore \quad h = v_{y0}t + \frac{1}{2}gt^2$$

বা, $490 = 0 + \frac{1}{2} \times 9.8t^2$

বা, $490 = 4.9\,t^2$ বা, $t^2 = 100$

$\therefore \quad t = 10$ sec

$\therefore$ AB-এর দূরত্ব, $x = v_{x_0} \times t = 147 \times 10 = 1470$ m

এখানে
$h = 490$ m
$v_{x0} = 147$ ms^{-1}
$v_{y0} = 0$

২। একটি ফুটবলকে ভূমির সাথে 30° কোণে 40 ms^{-1} বেগে কিক করা হলো। 2 sec পরে ফুটবলের বেগের মান কত হবে নির্ণয় কর।

মনে করি, ফুটবলটি যে বিন্দু হতে কিক করা হলো সেটি মূলবিন্দু এবং খাড়া উপরের দিক Y অক্ষ ধনাত্মক।

এখানে,
নিক্ষেপ কোণ, $\theta = 30°$
আদি বেগ, $v_0 = 40\ ms^{-1}$
সময়, $t = 2$ sec
শেষ বেগ, $v = ?$

শেষ বেগের অনুভূমিক ও উল্লম্ব উপাংশ যথাক্রমে v_x ও v_y হলে,

$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

আদি বেগের অনুভূমিক ও উল্লম্ব উপাংশ যথাক্রমে v_{x_0} ও v_{y_0} হলে,

আমরা পাই, $v_x = v_{x_0} + a_x t = v_0 \cos\theta + a_x t$ [$\because$ অনুভূমিক ত্বরণ, $a_x = 0$]

$= v_0 \cos\theta = 40 \cos 30° = 34{\cdot}64\ ms^{-1}$

এবং $v_y = v_{y_0} + a_y t = v_0 \sin\theta + a_y t$

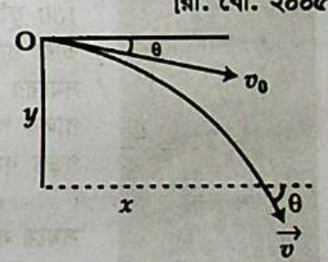
বা, $v_y = 40 \sin 30° + (-9{\cdot}8) \times 2$ [উল্লম্ব উপাংশ নিম্নমুখি হওয়ায় $a_y = -g = -9{\cdot}8\ ms^{-2}$]

$= 20 - 19{\cdot}6 = 0{\cdot}4\ ms^{-1}$

$\therefore\ v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(34{\cdot}64)^2 + (0{\cdot}4)^2}$

$= \sqrt{1199{\cdot}9 + 0{\cdot}16} = \sqrt{1200} = 34{\cdot}64\ ms^{-1}$

৩। 170 m উঁচু দালানের ছাদ থেকে অনুভূমিকের সাথে 30° কোণ করে নিচের দিকে একটি বস্তু নিক্ষেপ করা হলো। এর আদিবেগ 40 ms^{-1}।
(ক) ভূমিতে আঘাত করতে কত সময় লাগবে?
(খ) দালানের পাদবিন্দু হতে কত দূরে এটি ভূমিতে আঘাত করবে?
(গ) ভূমিতে এটি কত কোণে আঘাত করবে? [রা. বো. ২০০৫]



মনে করি নিক্ষেপণ বিন্দু মূলবিন্দু এবং খাড়া উপরের দিকে Y-অক্ষ ধনাত্মক।

এখানে $x_0 = y_0 = 0$

উল্লম্ব সরণ $(y - y_0) = -170$ m (নিম্নমুখি)

নিক্ষেপণ কোণ, $\theta_0 = -30°$ (অনুভূমিকের সাথে নিচের দিকের কোণ)

(ক) $t = ?$ (খ) $(x - x_0) = ?$ (গ) $\theta = ?$

এখানে অনুভূমিক ত্বরণ $a_x = 0$, উল্লম্ব ত্বরণ, $a_y = -g = -9{\cdot}8\ ms^{-2}$

(ক) আমরা জানি,

$y - y_0 = v_{y_0} + \frac{1}{2} a_y t^2 = v_0 \sin\theta_0 t + \frac{1}{2} a_y t^2$

বা, $-170 = 40 \sin(-30°) \times t - \frac{1}{2} \times 9{\cdot}8 \times t^2$

বা, $-170 = -20t - 4{\cdot}9t^2$

বা, $4{\cdot}9t^2 + 20t - 170 = 0$

বা, $t = \dfrac{-20 \pm \sqrt{(20)^2 - 4 \times 4{\cdot}9 \times 170}}{2 \times 4{\cdot}9}$

বা, $t = 4{\cdot}9$ sec বা, $t = -8{\cdot}27$ sec

সুতরাং $t = 4{\cdot}9$ sec

(খ) $x = x_0 + v_{x_0} t + \frac{1}{2} a_x t^2$

বা, $x - x_0 = v_{x0} t + \frac{1}{2} a_x t^2$

$= v_0 \cos\theta_0 t + \frac{1}{2} a_x t^2$

$= 40 \times \cos(-30°)\, t + \frac{1}{2} a_x t^2$

$= 40 \times \cos 30° \times 4{\cdot}9 + 0$ [$\because \cos(-30°) = \cos 30°$]

$= 40 \times \frac{1}{2} \times 4{\cdot}9 = 145{\cdot}15$ m

(গ) $v_x = v_{x_0} + a_x t$

$= v_0 \cos\theta_0 + a_x t = 40 \times \cos(-30°) + 0 = 34{\cdot}64 \text{ ms}^{-1}$

আবার $v_y = v_{y0} + a_y t = v_0 \sin\theta_0 + a_y t$

$= 40 \times \sin(-30°) + (-9{\cdot}8) \times 4{\cdot}19$

$= -61{\cdot}06 \text{ ms}^{-1}$

$\tan\theta = \dfrac{v_y}{v_x}$

বা, $\tan\theta = \dfrac{-61{\cdot}06}{34{\cdot}64} = -1{\cdot}76 \therefore \theta = -60°$

উত্তর : (ক) 4·9 sec; (খ) 145·15 m; (গ) − 60°.

৩·১০ পড়ন্ত বস্তুর সূত্র
Laws of Falling Bodies

তুমি যদি কখনও ছাদের উপর থেকে একটুকরা কাগজ ও একখন্ড পাথর একই সাথে নিচে ফেলে দাও তাহলে কী দেখতে পাবে ? দেখবে যে, পাথরখন্ডটি কাগজ অপেক্ষা আগে মাটিতে পৌঁছেছে।

চিত্র ৩·৪১

আমরা জানি যে, বস্তুর এই খাড়াভাবে পতনের কারণ অভিকর্ষজ বা পৃথিবীর আকর্ষণ বা অভিকর্ষ। অভিকর্ষজ ত্বরণ বস্তুর ভরের ওপর নির্ভর করে না, তাহলে কাগজের টুকরা এবং পাথরখণ্ডটি একই সময়ে মাটিতে পৌঁছাল না কেন ? এক্ষেত্রে বাতাসের বাধা বস্তু দুটির ভিন্ন সময়ে মাটিতে পতনের ক্ষেত্রে দায়ী। ইতালিয় বিজ্ঞানী গ্যালিলিও পড়ন্ত বস্তুর গতি নিয়ে গবেষণা করেন এবং পরীক্ষালব্ধ কিছু সূত্র দেন। তিনি 1589 খ্রিস্টাব্দে পিসা শহরের বিখ্যাত 180 ফুট উঁচু হেলানো একটি স্তম্ভের ছাদ থেকে বিভিন্ন ধরনের ভারী বস্তু ফেলে দেখান যে, তারা প্রায় একই সময়ে মাটিতে পৌঁছায় [চিত্র ৩·৪১]। ভারী ও হালকা বস্তুর পতনের ক্ষেত্রে সময়ের এই সামান্য পার্থক্য বায়ুর বাধার জন্য ঘটে। পরবর্তীকালে বিজ্ঞানী নিউটন গিনি ও পালক পরীক্ষার সাহায্যে এই তথ্যের সত্যতা প্রমাণ করেন। গ্যালিলিও এ ধরনের মুক্তভাবে পড়ন্ত বস্তুর গতি সংক্রান্ত তিনটি সূত্র প্রদান করেন। সূত্রগুলো হলো :

প্রথম সূত্র : একই উচ্চতায় স্থির অবস্থান থেকে মুক্তভাবে সকল পড়ন্ত বস্তু সমান সময়ে সমান দূরত্ব অতিক্রম করে।

ব্যাখ্যা : মনে করা যাক, m_1 ও m_2 ভরের দুটি বস্তু উঁচু কোনো স্থির অবস্থান থেকে সম্পূর্ণ বাধাহীনভাবে t সময়ে h_1 ও h_2 নিম্নমুখি দূরত্ব অতিক্রম করে। তাই এক্ষেত্রে $h_1 = h_2$.

দ্বিতীয় সূত্র : স্থির অবস্থান থেকে বিনা বাধায় পড়ন্ত বস্তুর নির্দিষ্ট সময় (t)-এ প্রাপ্ত বেগ (v) ওই সময়ের সমানুপাতিক।

ব্যাখ্যা : ধরা যাক, একটি বস্তু উঁচু কোনো স্থির অবস্থান থেকে সম্পূর্ণরূপে বাধাহীনভাবে ভূমিতে পতিত হচ্ছে। এক্ষেত্রে t সময়ে বস্তুটির বেগ v হলে $v \propto t$।

বা, $\dfrac{v}{t} =$ ধ্রুবক বা, $\dfrac{v_1}{t_1} = \dfrac{v_2}{t_2} =$ ধ্রুবক

এখানে v_1 ও v_2 হলো যথাক্রমে t_1 ও t_2 সময়ে বেগ।

তৃতীয় সূত্র : স্থির অবস্থান থেকে বিনা বাধায় পড়ন্ত বস্তু নির্দিষ্ট সময়ে যে দূরত্ব অতিক্রম করে তা ওই সময়ের বর্গের সমানুপাতিক।

ব্যাখ্যা : ধরা যাক একটি বস্তু উঁচু কোনো স্থির অবস্থান থেকে সম্পূর্ণ বাধাহীনভাবে ভূমিতে পতিত হচ্ছে। এক্ষেত্রে t সময়ে বস্তুটির অতিক্রান্ত দূরত্ব h হলে $h \propto t^2$

$\dfrac{h}{t^2} =$ ধ্রুবক বা, $\dfrac{h_1}{t_1^2} = \dfrac{h_2}{t_2^2} =$ ধ্রুবক

এখানে h_1 ও h_2 যথাক্রমে t_1 ও t_2 সময়ে অতিক্রান্ত দূরত্ব।

জেনে রাখ :
I. পড়ন্ত বস্তুর সূত্র দিয়েছেন গ্যালিলিও।
II. গিনি-পালক পরীক্ষা করেছেন নিউটন।
III. গিনি-পালক পরীক্ষা করা হয় 180 ফুট উঁচু হেলানো স্তম্ভের ছাদ থেকে।

পড়ন্ত বস্তুর সমীকরণ

মনে করি একটি বস্তু Y-অক্ষ বরাবর v_0 আদিবেগে উল্লম্বভাবে অভিকর্ষের প্রভাবে h উচ্চতা হতে নিচের দিকে মুক্তভাবে পড়ছে। পড়ন্ত বস্তুর ক্ষেত্রে,

$$v = v_0 + gt \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3.44)$$

$$h = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3.45)$$

এবং $v^2 = v_0^2 + 2gh \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3.46)$

মুক্তভাবে পড়ন্ত বস্তুর ক্ষেত্রে আদিবেগ $v_0 = 0$, অতএব

$$v = gt$$

$$h = \frac{1}{2} g t^2$$

এবং $v^2 = 2gh$

উত্থানকালের সময় নির্ণয় :

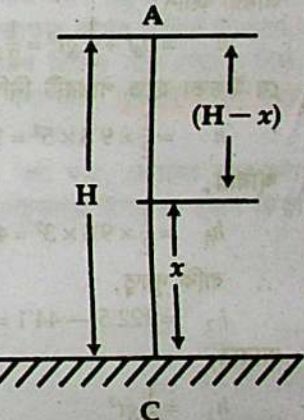
ধরা যাক $t = T_1$ সময়ে বস্তুটি সর্বোচ্চ বিন্দু $y = H$-এ গমন করে [চিত্র ৩˙৪২] । সেখানে শেষ বেগ $v = 0$. এক্ষেত্রে $v = v_0 - gt$ সমীকরণ ব্যবহার করে পাই,

$$0 = v_0 - gT_1$$

$$\therefore \quad T_1 = v_0/g \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3.47)$$

ইহা পতনকালের রাশিমালা নির্দেশ করে। অর্থাৎ পতনের সময়

$$T_1 = \frac{v_0}{g}$$



চিত্র ৩˙৪২

উত্থান ও পতনকালের সময় নির্ণয় :

ধরি $t = T$ সময়ে বস্তুটি সর্বোচ্চ বিন্দুতে উঠে আবার প্রাথমিক অবস্থান $y = 0$ এ নেমে আসে।

এ অবস্থায় $y = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$

$$0 = v_0 T - \frac{1}{2} g T^2$$

$$\frac{1}{2} g T^2 = v_0 T$$

$$\therefore \quad T = \frac{2v_0}{g} \quad \ldots \quad \ldots \quad (3.48)$$

উত্থানের সময় : $T_2 = T - T_1 = \frac{2v_0}{g} - \frac{v_0}{g} = \frac{v_0}{g}$

সুতরাং দেখা যায় যে, উত্থান ও পতনের সময় পরস্পর সমান।

গাণিতিক উদাহরণ ৩.১১

১। একটি উঁচু দালানের ছাদ থেকে একটি বল ঊর্ধ্বমুখে এবং অপর একটি বলকে একই বেগে নিচের দিকে ছোড়া হলো। দেখাও যে দুটি বলই একই বেগে ভূমিতে পড়বে।

ধরি, প্রথম বলের প্রাথমিক বেগ $= -u$ (উপরের দিকে)

এবং দ্বিতীয় বলের প্রাথমিক বেগ, $= +u$ (নিচের দিকে)

দালানের উচ্চতা, h

ধরি বল দুটি যথাক্রমে, v_1 ও v_2 বেগে ভূমিতে পড়ল। দেখাতে হবে যে,

$$v_1 = v_2$$

এখন, $v_1^2 = (-u)^2 + 2gh = u^2 + 2gh$

এবং $v_2^2 = u^2 + 2gh$

$$\therefore \quad v_1^2 = v_2^2$$

বা, $v_1 = v_2$ অর্থাৎ বল দুটি একই বেগে ভূমিতে পড়বে।

২। একটি কুয়ার ভেতরে 60 m গভীরতায় পানি আছে। কুয়ার মুখে ঢিল ফেললে যদি 3·68 sec পরে পানির শব্দ শোনা যায়, তবে শব্দের গতিবেগ কত ? ($g = 9{\cdot}8\ ms^{-2}$)

মনে করি, t sec পরে ঢিলটি পানিতে পড়ল।

আমরা জানি,

$$s = ut + \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}gt^2 \qquad [\because u = 0]$$

$$\therefore \quad t^2 = \frac{2s}{g} = \frac{2 \times 60}{9{\cdot}8} = \frac{120}{9{\cdot}8} = 12{\cdot}24$$

$$\therefore \quad t = \sqrt{12{\cdot}24} = 3{\cdot}50 \text{ sec}$$

সুতরাং, শব্দ 3·68 — 3·50 = 0·18 sec সময়ে 60 m দূরত্ব অতিক্রম করে।

অতএব, শব্দের বেগ, $v = \frac{60}{0{\cdot}18} = 3{\cdot}33\ ms^{-1}$

৩। একটি পাথর একটি নির্দিষ্ট উচ্চতা হতে 5 sec এ ভূমিতে পতিত হয়। পাথরটিকে 3 sec পর থামিয়ে দিয়ে আবার পড়তে দেয়া হলো। বাকি দূরত্ব অতিক্রম করে পাথরটির ভূমিতে পৌঁছাতে কত সময় লাগবে ?

[RUET Admission Test, 2015-16]

আমরা জানি,

$$h = v_0t + \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}gt^2 \quad [\because v_0 = 0]$$

যে উচ্চতা হতে পাথরটি নিক্ষিপ্ত হয়েছিল তা হলো,

$$h = \frac{1}{2} \times 9{\cdot}8 \times 5^2 = 122{\cdot}5 \text{ m}$$

আবার,

$$h_1 = \frac{1}{2} \times 9{\cdot}8 \times 3^2 = 44{\cdot}1 \text{ m}$$

$\therefore$ বাকি দূরত্ব,

$$h_2 = 122{\cdot}5 - 44{\cdot}1 = 78{\cdot}4 \text{ m}$$

আবার,

$$h_2 = \frac{1}{2}gt^2$$

$$\text{বা, } t = \sqrt{\frac{2h_2}{g}} = \sqrt{\frac{2 \times 78{\cdot}4}{9{\cdot}8}} = 4 \text{ sec}$$

উত্তর : পাথরটির ভূমিতে পৌঁছাতে 4 s সময় লাগবে।

হাতে-কলমে কাজ : তুমি ছাদের ওপর থেকে একটি কাগজ নিচে ফেলে দাও এবং তোমার বন্ধুকে গাছ থেকে একটি আম নিচে ফেলতে বল। উভয় পড়ন্ত বস্তুর ক্ষেত্রে ত্বরণ কী সুষম হবে ? এর কারণ খুঁজে বের কর।

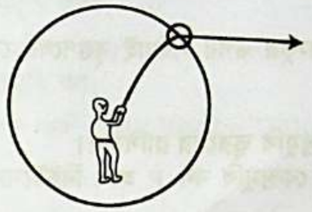
৩·১১ সুষম বৃত্তীয় গতি
Uniform Circular Motion

তুমি একটি সুতার এক প্রান্তে একটুকরা পাথর বেঁধে অন্য প্রান্ত আঙ্গুলে বেঁধে মাথার ওপর নিয়ে সমদ্রুতিতে ঘুরালে দেখবে পাথরটি একটি বৃত্তাকার পথে ঘুরছে। এখন যদি তুমি আঙ্গুল থেকে সুতাটি ছেড়ে দাও তাহলে তুমি কখনও দেখবে না যে, পাথরটি ঘুরতে ঘুরতে এক পর্যায়ে তোমার মাথার ওপর এসে পড়ছে। দেখতে পাবে পাথরটি যে স্থানে তোমার হাত থেকে ছুটে গেছে সেই স্থান থেকে বৃত্তাকার পথের সাথে স্পর্শকভাবে একদিকে ছিটকে যাবে [চিত্র ৩.৪৩(ক)]। নিচের চিত্রের দিকে লক্ষ করলে তুমি স্পষ্ট বুঝতে পারবে। মাথার ওপর যখন পাথরটি ঘুরছিল তখন প্রতি মুহূর্তে বেগের মান সমান হলে এ ধরনের গতি সুষম বৃত্তীয় গতি হয়।

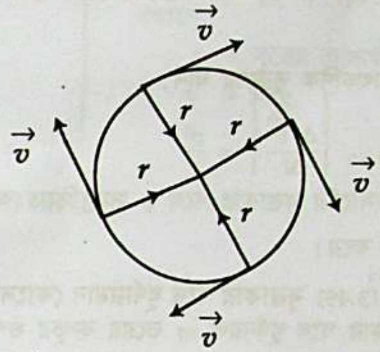
অর্থাৎ বৃত্তাকার পথে সমদ্রুতিতে ঘূর্ণায়মান কোনো বস্তুকণার গতিকে সুষম বৃত্তীয় গতি বলে।

সুষম বৃত্তীয় গতিতে সময়ের সাথে বস্তুর বেগের মান অপরিবর্তিত থাকলেও বেগের অভিমুখ পরিবর্তিত হয়। ফলে বেগের পরিবর্তন হয়। আর কোনো বিন্দুতে এই বেগের দিক ওই বিন্দুতে বৃত্তাকার পথের স্পর্শক বরাবর। কাজেই বেগের অভিমুখ পরিবর্তনের জন্য বস্তুর উপর একটি বল তথা ত্বরণ ক্রিয়া করে। এই ত্বরণের অভিমুখ গতিপথের লম্ব

বরাবর বৃত্তের কেন্দ্রমুখি। এই ত্বরণ হলো কেন্দ্রমুখি বা অভিলম্ব ত্বরণ। যদি ত্বরণের অভিমুখ অন্যদিকে হতো, তাহলে বৃত্তের স্পর্শক বরাবর অর্থাৎ কণাটির গতির অভিমুখে ত্বরণের উপাংশ থাকত; ফলে কণার দ্রুতির পরিবর্তন ঘটত।



চিত্র ৩.৪৩ (ক)



চিত্র ৩.৪৩(খ)

বৃত্তাকার পথে সমদ্রুতিতে চলমান বস্তুর ত্বরণ থাকে কেন ? এর উত্তরে বলা যায়, কোনো বস্তু সমদ্রুতিতে বৃত্তাকার পথের পরিধি বরাবর ঘুরতে থাকলে তখন ওই বস্তুর গতি সুষম বৃত্তাকার গতি হয়। এরূপ গতিতে চলমান বস্তু সমদ্রুতিতে চললেও বৃত্তাকার পথের ওপর বিভিন্ন বিন্দুতে এর দিক ভিন্ন ভিন্ন হয়। বৃত্তাকার পথের বিভিন্ন বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক থেকে এর দিক পাওয়া যায় [চিত্র ৩.৪৩(খ)]। বিভিন্ন বিন্দুতে স্পর্শকের অভিমুখ বিভিন্ন বলে বেগের দিক সর্বদা পরবর্তিত হচ্ছে। অর্থাৎ বেগেরও পরিবর্তন হচ্ছে। সুতরাং বস্তুর ত্বরণ হচ্ছে। তাই বলা যায়, **বৃত্তকার পথে সমদ্রুতিতে চলমান বস্তুর ত্বরণ থাকে।**

যেহেতু দ্রুতি স্থির অতএব কণার ত্বরণ সবসময় কেন্দ্রাভিমুখি হয়। সুতরাং বলা যায়, **কোনো বস্তুকণা যখন বৃত্তাকার পথে ঘুরতে থাকে তখন বৃত্তের ব্যাসার্ধ বরাবর এবং কেন্দ্রের অভিমুখে বস্তুকণার উপর যে ত্বরণ ক্রিয়া করে তাকে কেন্দ্রমুখি বা অভিকেন্দ্র ত্বরণ বলে।**

কেন্দ্রমুখি ত্বরণের মান ও দিক :

ধরি O কেন্দ্রবিশিষ্ট এবং r ব্যাসার্ধের PQR বৃত্তাকার পথে একটি বস্তুকণা v সমদ্রুতিতে ঘুরে t সময়ে P অবস্থানে ও $(t + \Delta t)$ সময়ে Q অবস্থানে পৌছল এবং $\angle POQ = \theta$ [চিত্র ৩.৪৪]। কাজেই Δt সময়ে কণাটির অতিক্রান্ত দূরত্ব $\Delta s = v\Delta t$ = বৃত্তচাপ PQ। P ও Q বিন্দুতে বস্তুকণাটির তাৎক্ষণিক বেগ $\vec{v_1}$ ও $\vec{v_2}$ উক্ত বিন্দুদ্বয়ে অঙ্কিত স্পর্শক অভিমুখি হবে। এই বেগদ্বয়ের উভয়ের মান v-এর সমান কিন্তু দিক ভিন্ন। Δt সেকেন্ডে বেগের পরিবর্তন $(\vec{v_2} - \vec{v_1})$-কে $\Delta\vec{v}$ দ্বারা সূচিত করলে, $\Delta\vec{v}$-এর মান ভেক্টরের ত্রিভুজ সূত্র হতে পাওয়া যাবে। একই বিন্দু A হতে $\vec{v_1}$ ও $\vec{v_2}$ ভেক্টর দুটি যথাক্রমে তীর চিহ্নিত AB ও AC সরলরেখা দ্বারা মানে ও দিকে নির্দেশ করে B ও C যোগ করি। তা হলে BC রেখা $\Delta\vec{v}$-কে মানে ও দিকে নির্দেশ করবে।

বর্ণনানুসারে OP, OQ ও PQ দ্বারা গঠিত ত্রিভুজ OPQ ও ত্রিভুজ ABC সদৃশকোণী। কেননা উভয়ই সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ এবং $\angle BAC = \angle POQ = \theta$ । কাজেই, $\angle ABC = \angle ACB = \varphi$ হলে,

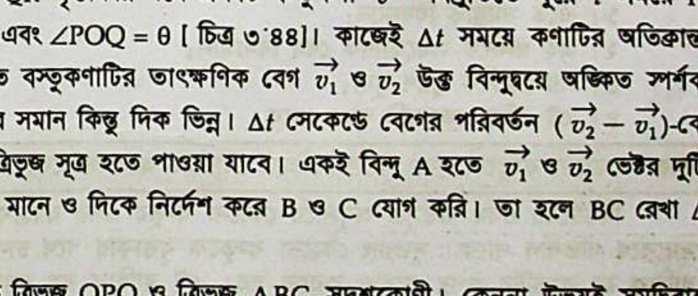
$$\varphi = \left(90^\circ - \frac{\theta}{2}\right)$$

আবার সদৃশ ত্রিভুজের ধর্মানুসারে,

$$\frac{BC}{AC} = \frac{PQ}{OQ}$$

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{v\Delta t}{r} \text{ (প্রায়)}$$

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v^2}{r}$$



চিত্র ৩.৪৪

এখানে বৃত্তচাপ PQ-কে জ্যা PQ-এর সমান ধরা হয়েছে। Δt ক্ষুদ্র হলে, সম্পর্কটি প্রায় সঠিক বিবেচনা করা যায়। কেননা এমতাবস্থায় বৃত্তচাপ PQ ও জ্যা PQ প্রায় সমান ধরা যায়।

$\Delta t \to 0$ হলে, P ও Q-এর মধ্যবর্তী দূরত্ব ও θ উভয়ই খুবই ক্ষুদ্র হবে অর্থাৎ P ও Q খুবই কাছাকাছি দুটি বিন্দু হবে এবং $\Delta\vec{v}$ ও $\vec{v_1}$ বা $\vec{v_2}$-এর মধ্যবর্তী কোণ $\theta = 90^\circ$ অর্থাৎ $\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$ কেন্দ্রের দিকে ক্রিয়া করবে। ফলে কাজ শূন্য হবে।

কাজেই তাৎক্ষণিক ত্বরণের মান,

$$a = Lt_{\Delta t \to 0}\left|\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}\right| = \frac{v^2}{r} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3.49)$$

$\therefore$ r ব্যাসার্ধের বৃত্তাকার পথে v সমদ্রুতিতে আবর্তনরত বস্তুর উপর সর্বদাই বৃত্তপথের কেন্দ্রের দিকে একটি ত্বরণ $a = \frac{v^2}{r}$ ক্রিয়া করে।

সমীকরণ (3.49) বৃত্তাকার পথে ঘূর্ণায়মান কোনো বস্তুর কেন্দ্রমুখি ত্বরণের রাশিফল।

$\therefore$ বৃত্তাকার পথে ঘূর্ণনরত m ভরের বস্তুর ওপর ক্রিয়ারত কেন্দ্রমুখি বল F হলে নিউটনের গতির দ্বিতীয় সূত্র অনুযায়ী, $F = ma$

বা, $F = m\frac{v^2}{r}$

বস্তুটির কৌণিক বেগ ω হলে, $v = \omega r$ হেতু

$$F = \frac{mv^2}{r} = \frac{m\omega^2 r^2}{r} = m\omega^2 r$$

জেনে রাখ : I. কেন্দ্রমুখি বল দ্বারা কৃত কাজ শূন্য হয়।
II. কেন্দ্রমুখি ত্বরণের দিক বৃত্তের কেন্দ্র বরাবর ক্রিয়া করে।

কেন্দ্রমুখি বলের ভেক্টর রূপ :

$-m(\vec{\omega}\cdot\vec{\omega})\vec{r} = -m\omega^2\vec{r} = \frac{mv^2\vec{r}}{r^2}$ এখানে $-$ ve চিহ্নের অর্থ হলো কেন্দ্রমুখি ত্বরণের দিক বা বলের দিক ব্যাসার্ধ ভেক্টরের তথা অবস্থান ভেক্টরের বিপরীত দিকে ব্যাসার্ধ বরাবর কেন্দ্রের দিকে।

সুষম বৃত্তাকার গতির বৈশিষ্ট্য :

১। এতে সমদ্রুতি বিদ্যমান;
২। এই গতিতে সমকৌণিক বেগ বিদ্যমান;
৩। এর কৌণিক ত্বরণ শূন্য;
৪। এই গতির কেন্দ্রমুখি ত্বরণ থাকে।

কাজ : কোনো বস্তুকে সুষম বৃত্তীয় গতিতে ঘোরাতে হলে অভিকেন্দ্র বলের প্রয়োজন হয় কেন ব্যাখ্যা কর।

নিউটনের প্রথম গতিসূত্র অনুসারে কোনো বস্তুর ওপর বাহ্যিক বল ক্রিয়া না করলে বস্তুটি স্থির থাকে অথবা সমবেগে গতিশীল থাকে। সুতরাং কোনো বস্তুকে বৃত্তাকার পথে চালানোর জন্য গতির অভিমুখের লম্বদিকে একটি বাহ্যিক বল বস্তুটির ওপর প্রয়োগ করতে হয়। এই বাহ্যিক বল ব্যাসার্ধ বরাবর বৃত্তের কেন্দ্রের দিকে ক্রিয়াশীল হয়। কেন্দ্রাভিমুখি এই বলটিই হলো অভিকেন্দ্র বল। অতএব, কোনো বস্তুকে সমবৃত্তীয় গতিতে ঘোরানোর জন্য অভিকেন্দ্র বল প্রয়োজন হয়।

অনুধাবনমূলক কাজ : সুষম দ্রুতিতে সরল পথে চলমান বস্তুর ত্বরণ থাকে না অথচ বৃত্তাকার পথে সুষম দ্রুতিতে চলমান বস্তুর ত্বরণ থাকে—ব্যাখ্যা কর।

গাণিতিক উদাহরণ ৩.১২

১। হাইড্রোজেন পরমাণুর ইলেকট্রন নিউক্লিয়াসকে কেন্দ্র করে $5{\cdot}2 \times 10^{-11}$ m ব্যাসার্ধের বৃত্তাকার কক্ষপথে $2{\cdot}2 \times 10^6$ ms^{-1} বেগে ঘুরছে। ইলেকট্রনের কেন্দ্রমুখি ত্বরণ নির্ণয় কর।

আমরা জানি, অভিলম্ব ত্বরণ,

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{(2{\cdot}2 \times 10^6)^2}{5{\cdot}2 \times 10^{-11}}$$

$$= \frac{2{\cdot}2 \times 2{\cdot}2 \times 10^{12} \times 10^{11}}{5{\cdot}2} = 9{\cdot}31 \times 10^{22}\ \text{ms}^{-2}$$

এখানে,
$v = 2{\cdot}2 \times 10^6\ \text{ms}^{-1}$
$r = 5{\cdot}2 \times 10^{-11}\text{m}$
$a = ?$

২। 50 g ভরের একটি বস্তুকে 30 cm দীর্ঘ একটি সুতার এক প্রান্তে বেঁধে বৃত্তপথে প্রতি সেকেন্ডে 3 বার ঘুরানো হচ্ছে। কেন্দ্রমুখি বল নির্ণয় কর।

এখানে,

$$\omega = 2\pi n \text{ rad s}^{-1} = 2\pi \times 3 \text{ rad s}^{-1}$$
$$= 6\pi \text{ rad s}^{-1}$$

এখানে,
r = বৃত্তের ব্যাসার্ধ = 30 cm
m = 50 g
n = 3

আবার, কেন্দ্রমুখি ত্বরণ,

$$a = \omega^2 r = (6\pi)^2 \times 30 = (18.852)^2 \times 30 = 10662 \text{ cm s}^{-2}$$

আবার, কেন্দ্রমুখি বল,

$$F = ma = m\omega^2 = 50 \times 10662 = 533100 \text{ dyne}$$

বিকল্প :

$$F = m\omega^2 r = m(2\pi n)^2 \times r$$
$$= 0.5\,(2 \times 3.14 \times 3)^2 \times 0.3$$
$$= 53.295 \text{ N}$$

এখানে,
r = 30 cm = 0.3 m
m = 50 g = 0.5 kg
n = 3

৩। কোনো বৈদ্যুতিক পাখার সুইচ অন করলে 10 বার পূর্ণ ঘূর্ণনের পর পাখাটির কৌণিক বেগ 20 rad/sec হয়। কৌণিক ত্বরণ কত ? [CUET Admission Test, 2009-10]

আমরা জানি,

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta$$

বা, $(20)^2 = 0 + 2\alpha \times 10 \times 2\pi$ $\quad [\because \theta = 2\pi n,\ n = 10]$

$$\therefore \alpha = \frac{10}{\pi} \text{ rad/s}^2$$

উত্তর : কৌণিক ত্বরণ $\frac{10}{\pi}$ rad/s²

প্রয়োজনীয় গাণিতিক সূত্রাবলি

$s = v_0 t \pm \frac{1}{2} a t^2$ ... ... (1)

$s = vt$ (গড় বেগের ক্ষেত্রে) ... ... (2)

$v = \frac{ds}{dt}$ ... ... (3)

$a = \frac{dv}{dt}$ ... ... (4)

$v^2 = v_0^2 \pm 2as$ ... ... (5)

$v = gt$ (পতনের ক্ষেত্রে) ... ... (6)

$h = \frac{1}{2} g t^2$ ... ... (7)

$v^2 = 2gh$ (পতনের ক্ষেত্রে) ... ... (8)

$h = \frac{1}{2} g\,(2t - 1)$ ... ... (9)

$v^2 = v_0^2 \pm 2gh$ ... ... (10)

$h = v_0 t \pm \frac{1}{2} g t^2$ ... ... (11)

$h = \frac{u^2}{2g}$ ... ... (12)

$t = \frac{u}{g}$ ... ... (13)

$$a = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r, \; v = \omega r \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (14)$$

$$F = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (15)$$

$$\omega = 2\pi n = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi N}{t} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (16)$$

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (17)$$

$$R = \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{g} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (18)$$

$$R_{max} = \frac{v_0^2}{g} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (19)$$

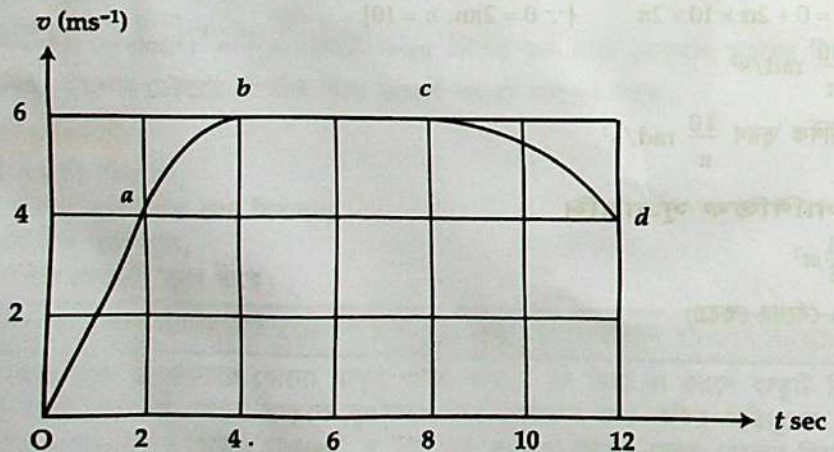
$$T = \frac{2v_0 \sin^2\theta}{g} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (20)$$

$$V = \omega r \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (21)$$

$$\omega = \frac{2\pi N}{t} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (22)$$

উচ্চতর দক্ষতাভিত্তিক নমুনার গাণিতিক উদাহরণ

১। স্বাধীনতা দিবসে কলেজের 100 m দৌড় প্রতিযোগিতায় রুবেলের গতিবেগ সময়ের সাথে কীভাবে পরিবর্তিত হয়েছিল তা নিম্নে গ্রাফে দেখানো হলো :



(ক) রুবেল 4 sec ও 8 sec এর মধ্যে কত দূরত্ব অতিক্রম করেছে ?

(খ) উদ্দীপক অনুসারে রুবেলের ত্বরণ বিশ্লেষণ কর।

(ক) রুবেল 4 sec এবং 8 sec-এর মধ্যবর্তী সময়ে সমবেগে দৌড়াচ্ছে

কাজেই $v = 6\ ms^{-1}$, $t = (8 - 4) = 4$ sec

∴ দূরত্ব, $s = vt = 6 \times 4 = 24$ m

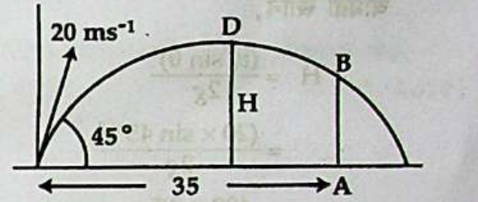
(খ) 0 থেকে a বিন্দুতে অসমবেগে আবার a থেকে b তে অসমবেগে চলে, কাজেই এই দুই ক্ষেত্রে ত্বরণ হবে। আবার b থেকে c তে বেগ সমান হওয়ায় এখানে ত্বরণ = 0। আবার c হতে d তে বেগ হ্রাস পায় অর্থাৎ মন্দন হয়।

আবার a বিন্দুতে ত্বরণ $= \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{4-2}{2-0} = \frac{2}{2} = 1\ ms^{-2}$

b বিন্দুতে ত্বরণ $= 0$

c বিন্দুতে ত্বরণ $= 0$, d তে মন্দন $= \frac{4}{12} = \frac{1}{3} ms^{-2}$

২। একটি ক্রিকেট টেস্টে তামিম একটি বলকে ব্যাটের সাহায্যে আঘাত করায় বলটি 45° কোণে এবং 20 ms^{-1} বেগে বোলারের মাথার ওপর দিয়ে মাঠের বাইরের দিকে যেতে শুরু করে। মধ্য মাঠ থেকে বিপক্ষ দলের একজন ফিল্ডার দৌড়াতে শুরু করলেন। ফিল্ডারটি বলের লাইনে পৌঁছানোর আগেই সেটি দর্শক গ্যালারিতে পৌঁছে গেল। মাঠের ভেতর বলটির অতিক্রান্ত দূরত্ব 35 m, ওই স্থানে $g = 9.8\ ms^{-2}$।



(ক) ব্যাটে আঘাত পাওয়া বলটি সর্বাধিক কত উচ্চতায় উঠবে ?

(খ) উদ্দীপকের ফিল্ডার ঊর্ধ্বে লাফ দিয়ে 3 m উচ্চতায় বল ধরতে পারেন। তিনি যদি সময় মতো বলের লাইনে পৌঁছতে পারতেন তাহলে তিনি বলটি ধরতে সক্ষম হতেন কি ? উত্তরের সপক্ষে গাণিতিক বিশ্লেষণ দাও।

(ক) মনে করি, বলটি সর্বাধিক উচ্চতা H-এ উঠবে।
আমরা জানি,

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g}$$

$$\therefore\ H = \frac{(20)^2 \times (\sin 45°)^2}{2 \times 9.8} = \frac{400 \times 0.5}{2 \times 9.8} = 10.2\ m$$

এখানে,
আদিবেগ, $v_0 = 20\ ms^{-1}$
নিক্ষেপ কোণ, $\theta = 45°$
মাঠের দূরত্ব, $x = 35\ m$
$g = 9.8\ ms^{-2}$

(খ) মনে করি বলটি y উচ্চতায় মাঠ অতিক্রম করে।
এখন, আদিবেগের অনুভূমিক উপাংশ,

$$v_{x0} = v_0 \cos 45° = 20 \times 0.707 = 14.14\ ms^{-1}$$

ধরি, t সময় পর বলটি মাঠের সীমানা অতিক্রম করে।

$$v_{x0} t = x$$

$$\therefore\ v_{x0} t = 35$$

$$\therefore\ t = \frac{35}{14.14} = 2.475\ s$$

আদিবেগের উল্লম্ব উপাংশ,

$$v_{y0} = 20 \sin 45° = 20 \times 0.707 = 14.14\ ms^{-1}$$

t সময়ে উল্লম্ব সরণ,

$$y = v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2 = 14.14 \times 2.475 - \frac{1}{2} \times 9.8 \times (2.475)^2 = 35 - 30 = 5\ m$$

ফিল্ডার লাফ দিয়ে 3 m উচ্চতায় পৌছতে পারেন, কিন্তু বলটি 5 m ওপর দিয়ে মাঠ অতিক্রম করে। সুতরাং ফিল্ডার বলটি ধরতে পারতেন না।

৩। বাংলাদেশ জিম্বাবুয়ের মধ্যকার টেস্টে সাকিব একটি বলকে ব্যাটের সাহায্যে আঘাত করায় বলটি 45° কোণে এবং 20 ms^{-1} বেগে বোলারের উপর দিয়ে মাঠের বাইরে যেতে শুরু করে। মধ্য মাঠ থেকে একজন ফিল্ডার দৌড়াতে শুরু করল। ফিল্ডারটি বলের লাইনে পৌছানোর আগেই সেটি ছক্কাতে পরিণত হলো। মাঠের ভেতর বলটির অতিক্রান্ত দূরত্ব 35 m। [ঢা. বো. ২০১৫]

(ক) খাড়াভাবে নিক্ষিপ্ত বস্তুর অনুভূমিক দূরত্ব শূন্য কেন?

(খ) উদ্দীপকে বলটি সর্বাধিক কত উচ্চতায় উঠবে?

(গ) উদ্দীপকের ফিল্ডার ঊর্ধ্বে লাফ দিয়ে 3 m উচ্চতায় বল ধরতে পারে। সে যদি সময়মতো বলের লাইনে পৌছাতে পারত তাহলে ক্যাচ নিতে সমর্থ হতো কী? উত্তরের সপক্ষে গাণিতিক বিশ্লেষণ দাও।

(ক) খাড়া উপরে নিক্ষিপ্ত বস্তুর অনুভূমিক দিকে নিক্ষেপণ বেগের উপাংশ শূন্য। তাই নিক্ষিপ্ত বস্তুর অনুভূমিক দূরত্বও শূন্য হয়।

(খ) ধরি উদ্দীপকের বলটি সর্বাধিক H উচ্চতায় উঠবে।

আমরা জানি,

$$H = \frac{(v_0 \sin\theta)^2}{2g} = \frac{(20\times\sin 45°)^2}{2g} = \frac{400\times 0.5}{2\times 9.8} = 10.2\text{ m}$$

এখানে,
$v_0 = 20\text{ ms}^{-1}$
$\theta = 45°$
$g = 9.8\text{ ms}^{-2}$
$H = ?$

(গ) আমরা জানি, $x = v_0\cos\theta t$

$$t = \frac{x}{v_0\cos\theta} = \frac{35}{20\times\frac{1}{\sqrt{2}}} = 2.47\text{ sec}$$

এখন, $y = v_0\sin\theta t - \frac{1}{2}gt^2$

$$= 20\times\sin 45°\times 2.47 - \frac{1}{2}\times 9.8\times(2.47)^2$$
$$= 5.03\text{ m}$$

উদ্দীপকে ফিল্ডার ঊর্ধ্বে লাফ দিয়ে 3 m উচ্চতায় বল ধরতে পারে।

যেহেতু $y = 5.03\text{ m} > 3\text{ m}$, সেহেতু উদ্দীপকের ফিল্ডার সময়মতো বলের লাইনে পৌঁছাতে পারলেও বলটি ক্যাচ ধরতে সমর্থ হতো না।

৪। সার্কাস পার্টিতে একজন পারফরমার 5 kg ভরের একটি গোলককে ভূমি থেকে 1.5 m উপরে অনুভূমিক তলে 2 m লম্বা রশির সাহায্যে বৃত্তাকার পথে ঘোরাচ্ছেন। গোলকটি প্রতি মিনিটে 20 বার আবর্তন করে। ঘূর্ণায়মান অবস্থায় হঠাৎ রশিটি ছিঁড়ে যায়।

(ক) আবর্তনশীল গোলকটি কেন্দ্রের দিকে কত বল অনুভব করবে?

(খ) পারফরমার হতে দর্শক সারির দূরত্ব কেমন হলে গোলকটি কোনো দর্শককে আঘাত করবে না? গাণিতিক বিশ্লেষণের মাধ্যমে ব্যাখ্যা কর।

(ক) আমরা জানি,

$$F_C = m\omega^2 r = m\times\left(\frac{2\pi N}{t}\right)^2\times r = 5\times\left(\frac{2\times 3.14\times 20}{60}\right)^2\times 2 = 43.87\text{ N}$$

এখানে,
$m = 5\text{ kg}$
$r = 2\text{ m}$
$N = 20$
$t = 1\text{ min} = 60\text{ sec}$
কেন্দ্রমুখী বল, $F_C = ?$

(খ) আমরা জানি,

$$\omega = \frac{2\pi N}{t} = \frac{2\pi\times 20}{60} = 2.0944\text{ rads}^{-1}$$

আবার, $v = \omega r = 2.0944\times 2 = 4.188\text{ ms}^{-1}$

গোলকটির সর্বোচ্চ অনুভূমিক পাল্লা R হলে,

$$R = \frac{v^2}{g} = \frac{(4.188)^2}{9.8} = 1.79\text{ m}$$ (পারফরমার হতে)।

সুতরাং, পারফরমার হতে দর্শক সারির দূরত্ব 1.79 m এর বেশি হলে গোলকটি কোনো দর্শককে আঘাত করবে না।

৫। একজন শিকারী 75 m দূরে অবস্থিত 10 m উঁচু একটি দেওয়ালে বসে থাকা পাখিকে লক্ষ করে একটি বুলেট ছুড়ল। বুলেটটির নিক্ষেপণ কোণ 60° এবং নিক্ষেপণ বেগ $v_0 = 30\ \text{ms}^{-1}$।

(ক) উদ্দীপকে বর্ণিত বুলেটটি কত সময় শূন্যে ছিল তা নির্ণয় কর।

(খ) উদ্দীপকে বর্ণিত বুলেটটি পাখিটিকে আঘাত করবে কি-না? গাণিতিকভাবে যুক্তিসহকারে বিশ্লেষণ কর। [চ. বো. ২০১৫]

(ক) আমরা জানি,

বিচরণকাল $T = \dfrac{2v_0 \sin\theta}{g} = \dfrac{2 \times 30 \times \sin 60°}{9.8} = 5.302\ \text{s}$

(খ) আমরা জানি,

$$y = (\tan\theta)\,x - \frac{g}{2(v_0\cos\theta)^2}x^2$$

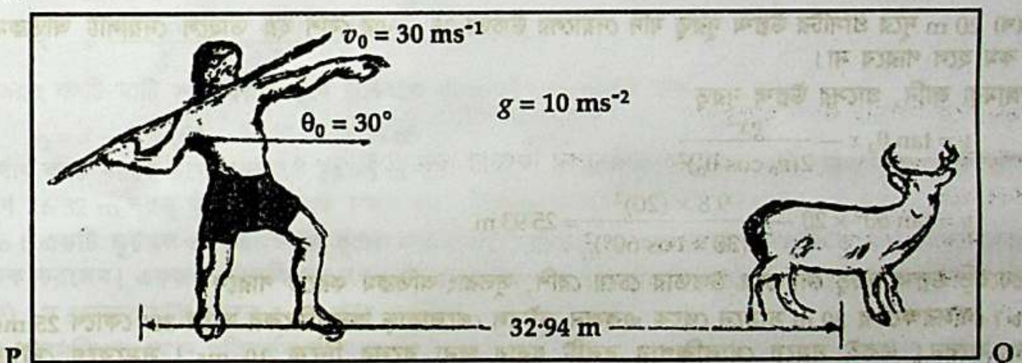
$$= \tan 60° \times 75 - \frac{9.8}{2(30 \times \cos 60°)^2} \times (75)^2$$

$$= 129.9 - 122.5 = 7.4\ \text{m}$$

এখানে,
$x_0 = y_0 = 0$
$v_0 = 30\ \text{ms}^{-1}$
$x = 75\ \text{m}$
$\theta = 60°$
$y = ?$
দেওয়ালের উচ্চতা, $h = 10\ \text{m}$

যেহেতু বুলেটটির উল্লম্ব দূরত্ব $y = 7.4\ \text{m}$ এবং পাখিটির অবস্থান 10 m উচ্চতাবিশিষ্ট দেওয়ালের উপর তাই বুলেটটি পাখিটিকে আঘাত করবে না।

৬।



শিকারী যখন বর্শাটি নিক্ষেপ করেন হরিণটি তখন স্থিরাবস্থা থেকে $10\ \text{ms}^{-1}$ সমত্বরণে PQ বরাবর দৌড়াতে থাকে। [চ. বো. ২০১৫]

(ক) উদ্দীপকে বর্শাটি এর নিক্ষেপণ বিন্দু হতে সর্বাধিক কত উচ্চতায় উঠবে?

(খ) বর্শাটি কি হরিণটিকে আঘাত করবে? তোমার উত্তরের সপক্ষে গাণিতিক যুক্তি উপস্থাপন কর।

(ক) আমরা জানি, সর্বাধিক উচ্চতা

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g} = \frac{(30)^2 \times (\sin 30°)^2}{2 \times 10} = 11.25\ \text{m}$$

(খ) বর্শাটির অনুভূমিক পাল্লা, $R = \dfrac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$

$$= \frac{(30)^2 (\sin 2 \times 30°)}{10} = 77.94\ \text{m}$$

বর্শাটির উড্ডয়নকাল, $T = \dfrac{2v_0\sin\theta}{g} = \dfrac{2 \times 30 \times \sin 30°}{10} = 3\ \text{sec}$

3 সে. পর শিকারী থেকে হরিণের দূরত্ব,

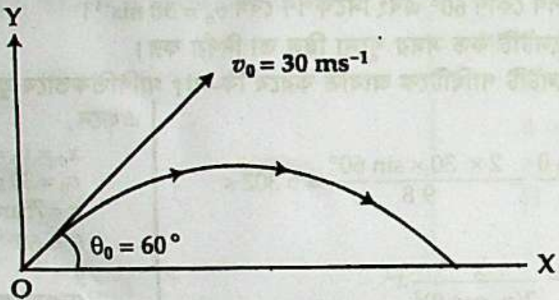
$$s = 32.94 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$= 32.94 + \frac{1}{2} \times 10 \times (3)^2 = 77.94\ \text{m}$$

এখানে,
$v_0 = 0$

এক্ষেত্রে পাল্লা এবং হরিণ কর্তৃক অতিক্রান্ত দূরত্ব সমান। সুতরাং বর্শাটি হরিণকে আঘাত করবে।

৭।



(ক) প্রাসটির পাল্লা নির্ণয় কর।

(খ) প্রাসটির নিক্ষেপণ বিন্দু থেকে X-অক্ষ বরাবর 20 m দূরে 25 m উঁচু দেয়াল অতিক্রম করতে পারবে কী ?

[য. বো. ২০১৬]

(ক) আমরা জানি, প্রাসের পাল্লা,

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g} = \frac{(30)^2 \times \sin 120°}{9.8}$$
$$= 79.53\ m$$

(খ) 20 m দূরে প্রাসটির উল্লম্ব দূরত্ব যদি দেয়ালের উচ্চতা 25 m এর বেশি হয় তাহলে দেয়ালটি অতিক্রম করতে পারবে, কম হলে পারবে না।

আমরা জানি, প্রাসের উল্লম্ব দূরত্ব

$$y = \tan\theta_0\, x - \frac{gx^2}{2(v_0 \cos\theta_0)^2}$$

$$y = \tan 60° \times 20 - \frac{9.8 \times (20)^2}{2(30 \times \cos 60°)^2} = 25.93\ m$$

যেহেতু উল্লম্ব দূরত্ব দেয়ালের উচ্চতার চেয়ে বেশি, সুতরাং অতিক্রম করতে পারবে।

৮। গোলরক্ষকের 80 m সামনে থেকে একজন ফুটবল খেলোয়াড় অনুভূমিকের সাথে 30° কোণে 25 ms^{-1} বেগে বল কিক করেন। একই সময়ে গোলকিপার বলটি ধরার জন্য বলের দিকে 10 ms^{-1} সমবেগে দৌঁড়ে যান। [$g = 9.8\ ms^{-2}$]

(ক) কিক করার 0.5 s পরে বলের বেগ কত ?

(খ) বলটি ভূমিতে পড়ার আগে গোলকিপার বলটি ধরতে পারবেন কী না—গাণিতিক বিশ্লেষণ করে মতামত দাও।

[রা. বো. ২০১৬]

(ক) মনে করি যে বিন্দু থেকে ফুটবলটি কিক করা হয় সেটি মূল বিন্দু এবং খাড়া ওপরের দিক Y-অক্ষ ধনাত্মক। শেষ বেগের অনুভূমিক ও উল্লম্ব উপাংশ যথাক্রমে v_x ও v_y হলে $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

আদিবেগের অনুভূমিক ও উল্লম্ব উপাংশ যথাক্রমে v_{x0} ও v_{y0} হলে

$$v_x = v_{x0} + a_x t$$
$$= v_0 \cos\theta_0 + a_x t = 25 \times \cos 30° + 0 = 21.65\ ms^{-1}$$

এবং

$$v_y = v_{y0} + a_y t = v_0 \sin\theta_0 + a_y t = 25 \times \sin 30° - 9.8 \times 0.5 = 7.6\ ms^{-1}$$

(খ) বলটি যে সময় শূন্যে থাকবে অর্থাৎ বলের উড্ডয়ন কাল,

$$T = \frac{2v_0 \sin\theta_0}{g}$$
$$= \frac{2 \times 25 \times \sin 30°}{9.8} = 2.55\ sec$$

এ সময় গোলরক্ষক কর্তৃক অতিক্রান্ত দূরত্ব, $s = vt = 10 \times 2.55 = 25.5\ m$

বলটির অনুভূমিক পাল্লা,

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g} = \frac{(25)^2 \times \sin 60°}{9.8} = 55.23\ m$$

অর্থাৎ মাটি স্পর্শ করার পূর্বে গোলকিপার যদি বলের দিকে কমপক্ষে $(80 - 55.23)$ m = 24.77 m দূরত্ব অতিক্রম করতে পারেন তাহলে তিনি বলটি ধরতে পারবেন। যেহেতু গোলকিপার বল মাটি স্পর্শ করার পূর্বে 25.5 m দূরত্ব অতিক্রম করতে সক্ষম, কাজেই তিনি বলটি ধরতে পারবেন।

৯। ভারত বনাম বাংলাদেশের ক্রিকেট ম্যাচে ব্যাটসম্যান বিরাট কোহলীর দিকে সাকিব-আল হাসান বল করলেন। $20\ ms^{-1}$ বেগে এবং $30°$ কোণে ব্যাটসম্যান বলটিকে আঘাত করলেন। ব্যাটসম্যান হতে 60 m দূরে থাকা রুবেল $8\ ms^{-1}$ বেগে দৌঁড়ে বলটি ক্যাচ ধরার জন্য অগ্রসর হলেন।

(ক) বলটি কত সময় শূন্যে অবস্থান করবে ?

(খ) রুবেলের পক্ষে ক্যাচ ধরা সম্ভব কী ? গাণিতিক বিশ্লেষণের মাধ্যমে সিদ্ধান্ত দাও। [ব. বো. ২০১৬]

(ক) আমরা জানি, উড্ডয়নকাল

$$T = \frac{2v_0 \sin \theta_0}{g} = \frac{2 \times 30 \times \sin 30°}{9.8} = 2.04 \text{ sec}$$

(খ) ব্যাটসম্যান থেকে রুবেলের দূরত্ব, $d = 60$ m

রুবেল 2.04 সেকেন্ডে ব্যাটসম্যানের দিকে দৌঁড়ে আসবেন,

$\therefore$ রুবেল কর্তৃক অতিক্রান্ত দূরত্ব, s_1 = রুবেলের বেগ $\times$ বলটির উড্ডয়নকাল $= 8 \times 2.04 = 16.32$ m

বলটির অনুভূমিক পাল্লা,

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g} = \frac{(20)^2 \times \sin 60°}{9.8} = 35.35 \text{ m}$$

সুতরাং বলটি মাটি স্পর্শ করার পূর্বে রুবেলকে দূরত্ব অতিক্রম করতে হবে।

$$s_2 = d - R = (60 - 35.35) \text{ m} = 24.65$$

অর্থাৎ ক্যাচ ধরতে হলে রুবেলকে 24.65 m দূরত্ব 2.04 s এ অতিক্রম করতে হবে। কিন্তু রুবেল বল মাটি স্পর্শ করার আগে 16.32 m দূরত্ব অতিক্রম করতে সক্ষম হন। কাজেই ক্যাচ ধরা সম্ভব হবে না।

১০। একটি ফুটবল প্রশিক্ষণকালে দুজন খেলোয়াড় উভয়েই $10\ ms^{-1}$ বেগে যথাক্রমে $30°$ এবং $60°$ কোণে ফুটবল কিক করলেন। একজন গোলকিপার বল দুটিকে মাটিতে পড়বার ঠিক আগ মুহূর্তে ধরবার জন্য দাঁড়িয়ে ছিলেন।

(ক) ১ম খেলোয়াড়ের ক্ষেত্রে 1 sec পরে বলটির বেগের মান কত ?

(খ) গোলকিপার স্থান পরিবর্তন না করে ভিন্ন সময়ে বল দুটি ধরতে সক্ষম হবে—এর সত্যতা গাণিতিকভাবে যাচাই কর। [কু. বো. ২০১৬]

এখানে,
নিক্ষেপ কোণ, $\theta = 30°$
আদিবেগ, $v_0 = 10\ ms^{-1}$
সময়, $t = 1$ sec
বলটির বেগ, $v = ?$

(ক) আমরা জানি, বেগের অনুভূমিক উপাংশ

$$v_x = v_0 \cos\theta = 10 \cos 30° = 10 \times 0.866 = 8.66\ ms^{-1}$$

এবং উল্লম্ব উপাংশ

$$v_y = v_0 \sin\theta - gt = 10 \sin 30° - gt = 10 \sin 30° - 9.8 \times 1 = 5 - 9.8 = -4.8\ ms^{-1}$$

$\therefore$ বেগের মান $|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(8.66)^2 + (-4.8)^2} = \sqrt{98.03} = 9.90\ ms^{-1}$

(খ) ১ম ও ২য় খেলোয়াড়ের বলের আদিবেগ, $v_0 = 10\ ms^{-1}$

১ম খেলোয়াড়ের নিক্ষেপণ কোণ $= 30°$

এবং ২য় খেলোয়াড়ের নিক্ষেপণ কোণ $= 60°$

উদ্দীপক হতে পাই,
নিক্ষেপণ বেগ, $v_0 = 32\ ms^{-1}$
নিক্ষেপণ কোণ, $\theta = 30°$
AB দেওয়ালের দূরত্ব, $x = 85$ m
AB দেওয়ালের উচ্চতা, $y = 2$ m

(খ) মনে করি বস্তুটিকে θ কোণে নিক্ষেপ করলে বস্তুটি ঠিক AB দেওয়ালের ওপর দিয়ে চলে যায়।

আমরা জানি,

$$y = (\tan\theta)x - \frac{gx^2}{(2v_0 \cos\theta)^2}$$

$$\text{বা,}\quad 2 = \tan\theta \times 85 - \frac{9.8 \times (85)^2}{2 \times (32 \cos\theta)^2}$$

১ম খেলোয়াড়ের বলটির অনুভূমিক পাল্লা,

$$R_1 = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_1}{g}$$

$$= \frac{(10)^2 \sin (2 \times 30°)}{9{\cdot}8} = 8{\cdot}837 \text{ m}$$

২য় খেলোয়াড়ের বলটির অনুভূমিক পাল্লা,

$$R_2 = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_2}{g}$$

$$= \frac{(10)^2 \times \sin (2 \times 60°)}{9{\cdot}8} = 8{\cdot}837 \text{ m}$$

প্রথম বলটির উড্ডয়নকাল,

$$T_1 = \frac{2v_0 \sin \theta_1}{g} = \frac{2 \times 10 \times \sin 30°}{9{\cdot}8} = 1{\cdot}02 \text{ sec}$$

দ্বিতীয় বলটির উড্ডয়নকাল,

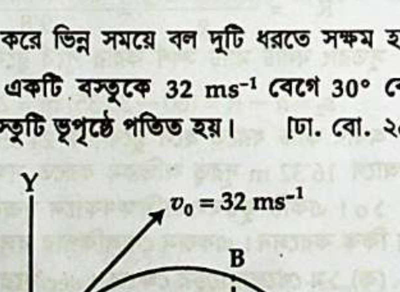
$$T_2 = \frac{2v_0 \sin \theta_2}{g} = \frac{2 \times 10 \times \sin 60°}{9{\cdot}8} = 1{\cdot}767 \text{ sec}$$

$\therefore R_1 = R_2$ কিন্তু $T_1 \neq T_2$; কাজেই গোলকিপার স্থান পরিবর্তন না করে ভিন্ন সময়ে বল দুটি ধরতে সক্ষম হবে।

১১। দুই বন্ধু সুমন ও রানা দেখল যে, ভূপৃষ্ঠস্থ O বিন্দু হতে একটি বস্তুকে 32 ms^{-1} বেগে 30° কোণে নিক্ষেপ করায় 85 m দূরে অবস্থিত 2 m উঁচু AB দেয়ালের ওপর দিয়ে বস্তুটি ভূপৃষ্ঠে পতিত হয়। [ঢা. বো. ২০১৭]

(ক) O বিন্দু হতে নিক্ষেপণের 1·2 s পর নিক্ষিপ্ত বস্তুটির বেগ নির্ণয় কর।

(খ) উদ্দীপক অনুসারে নিক্ষেপণ কোণের সর্বনিম্ন কী পরিবর্তন করলে প্রাসটি AB দেয়ালে বাধা পাবে ? গাণিতিক বিশ্লেষণসহ মতামত দাও।



(ক) 1·2 s পর বস্তুর বেগ $\vec{v}$ হলে, আমরা জানি বেগের অনুভূমিক উপাংশ

এখানে,
নিক্ষেপণ কোণ, $\theta = 30°$
আদিবেগ, $v_0 = 32$ ms^{-1}
সময়, $t = 1{\cdot}2$ sec

$$v_x = v_0 \cos \theta = 32 \times \cos 30°$$

$$= 32 \times 0{\cdot}866 = 27{\cdot}71 \text{ ms}^{-1}$$

এবং উল্লম্ব উপাংশ,

$$v_y = v_0 \sin \theta - gt$$

$$= 32 \times \sin 30° - 9{\cdot}8 \times 1{\cdot}2$$

$$= 32 \times 0{\cdot}5 - 9{\cdot}8 \times 1{\cdot}2 = 4{\cdot}24 \text{ ms}^{-1}$$

$\therefore$ বেগের মান $|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

$$= \sqrt{(27{\cdot}71)^2 + (4{\cdot}24)^2}$$

$$= 28{\cdot}03 \text{ ms}^{-1}$$

ধরি বেগের দিক অনুভূমিকের সাথে θ কোণ করে

$$\therefore \tan \theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{4{\cdot}24}{27{\cdot}71}$$

$$\therefore \theta = \tan^{-1} \frac{4{\cdot}24}{27{\cdot}71} = 8{\cdot}698°$$

বা, $2 = \tan\theta \times 85 - \dfrac{34.573}{\cos^2\theta}$

বা, $2 = \tan\theta \times 85 - \sec^2 \times (34.573)$

বা, $2 = \tan\theta \times 85 - 34.573\,(1 + \tan^2\theta)$

বা, $2 = \tan\theta \times 85 - 34.573 - 34.573\tan^2\theta$

বা, $34.573\tan^2\theta - 85\tan\theta + 36.573 = 0$

$\therefore$ $\theta = 62.24°$ অথবা $\theta = 29.07°$

অতএব নিক্ষেপণ কোণ সর্বনিম্ন $(30° - 29.07°) = 0.93°$ কমালে প্রাসটি AB দেওয়ালে বাধা পাবে।

সার-সংক্ষেপ

প্রসঙ্গ কাঠামো : যে দৃঢ় বস্তু বা বিন্দুর সাপেক্ষে কোনো স্থানে অন্য বিন্দু বা বস্তুকে নির্দিষ্ট করা হয়, তাকে প্রসঙ্গ কাঠামো বলে।

সরণ : কোনো বস্তুর সরণ একটি ভেক্টর রাশি যার মান বস্তুটির শেষ এবং আদি অবস্থানের মধ্যে ন্যূনতম দূরত্ব এবং দিক হলো আদি থেকে শেষ অবস্থানের দিকে।

গড় দ্রুতি : কোনো বস্তু কর্তৃক অতিক্রান্ত মোট দূরত্ব এবং মোট ব্যয়িত সময়ের ভাগফলকে গড় দ্রুতি বলে।

তাৎক্ষণিক দ্রুতি বা দ্রুতি : সময় ব্যবধান শূন্যের কাছাকাছি হলে সময়ের সঙ্গে বস্তুর দূরত্বের পরিবর্তনের হারকে তাৎক্ষণিক দ্রুতি বা দ্রুতি বলে।

গড় বেগ : যে কোনো সময় ব্যবধানে কোনো বস্তুর মোট সরণকে ওই সময় ব্যবধান দিয়ে ভাগ করলে যে রাশি পাওয়া যায় তাকেই বস্তুটির গড় বেগ বলে।

তাৎক্ষণিক বেগ বা বেগ : সময় ব্যবধান শূন্যের কাছাকাছি হলে সময়ের সঙ্গে বস্তুর সরণের পরিবর্তনের হারকে তাৎক্ষণিক বেগ বা বেগ বলে।

সমবেগ : কোনো বস্তুর বেগ সবসময় ধ্রুব থাকলে ওই বেগকে সমবেগ বলে।

গড় ত্বরণ : কোনো একটি গতিশীল বস্তুর বেগের বৃদ্ধি এবং ওই বৃদ্ধির জন্য ব্যয়িত সময়ের ভাগফলকে গড় ত্বরণ বলে।

তাৎক্ষণিক ত্বরণ বা ত্বরণ : সময় ব্যবধান শূন্যের কাছাকাছি হলে কোনো একটি গতিশীল বস্তুর বেগ বৃদ্ধির হারকে তাৎক্ষণিক ত্বরণ বা ত্বরণ বলে।

সমত্বরণ : ত্বরণ যদি সবসময় ধ্রুব হয় তবে তাকে সমত্বরণ বলে।

পড়ন্ত বস্তুর সূত্র → পড়ন্ত বস্তুর তিনটি সূত্র রয়েছে। সূত্রগুলো নিম্নে বিবৃত হলো।

১ম সূত্র : বায়ুশূন্য স্থানে সকল বস্তুই স্থির অবস্থান হতে যাত্রা করে সমান সময়ে সমান পথ অতিক্রম করে।

২য় সূত্র : বাধাহীন পথে পড়ন্ত বস্তুর নির্দিষ্ট সময়ের প্রাপ্ত বেগ ওই সময়ের সমানুপাতিক।

৩য় সূত্র : বাধাহীন পথে পড়ন্ত বস্তুর নির্দিষ্ট সময়ের অতিক্রান্ত দূরত্ব ওই সময়ের বর্গের সমানুপাতিক।

প্রাস বা প্রক্ষেপক : কোনো একটি বস্তুকে অনুভূমিকের সাথে তির্যকভাবে ওপরের দিকে নিক্ষেপ করা হলে তাকে প্রাস বা প্রক্ষেপক বলে।

বিচরণ কাল বা ভ্রমণকাল : নিক্ষেপের মুহূর্ত হতে সমতলে ফিরে আসতে নিক্ষিপ্ত বস্তুর যে সময় লাগে তাকে বিচরণকাল বা ভ্রমণকাল বলে।

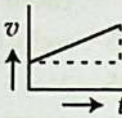
পাল্লা : নিক্ষেপণ বিন্দু ও বিচরণ পথের শেষ প্রান্ত বিন্দুর মধ্যবর্তী রৈখিক দূরত্বকে পাল্লা বলে।

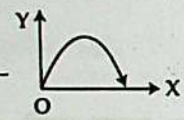
বৃত্তীয় গতি : কোনো বস্তুকণা যদি কোনো অক্ষ বা বিন্দুকে কেন্দ্র করে একটি বৃত্তাকার পথে গতিশীল থাকে, তবে বস্তুকণার এই গতিকে বৃত্তীয় গতি বলে।

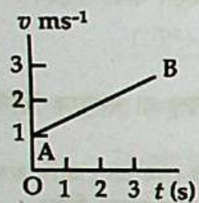
সুষম বৃত্তীয় গতি : বৃত্তাকার পথে সমদ্রুতিতে ঘূর্ণায়মান কোনো বস্তুকণার গতিকে সুষম বৃত্তীয় গতি বলে।

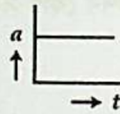
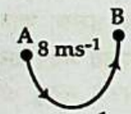
কেন্দ্রমুখি বা অভিকেন্দ্র ত্বরণ : কোনো বস্তুকণা যখন বৃত্তাকার পথে ঘুরতে থাকে তখন বৃত্তের ব্যাসার্ধ বরাবর এবং কেন্দ্রের অভিমুখে বস্তুকণার উপর যে ত্বরণ ক্রিয়া করে তাকে কেন্দ্রমুখ বা অভিকেন্দ্র ত্বরণ বলে।

বহুনির্বাচনি প্রশ্নের উত্তরের জন্য প্রয়োজনীয় বিষয়াবলির সার-সংক্ষেপ

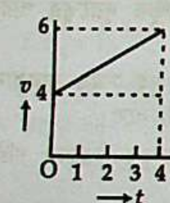
১। $v = u + at$ সমীকরণটি পাশের $v - t$ লেখচিত্রের মাধ্যমে প্রকাশ করা যায়।  এর ঢাল = ত্বরণ।

২। প্রাসের ক্ষেত্রে লেখচিত্র হলো—  । প্রাসের সর্বাধিক উচ্চতা, $H = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g}$।

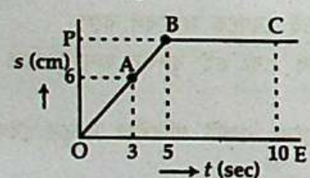
৩। 

অসম বেগের এই লেখচিত্রের আলোকে ত্বরণকে  এই লেখচিত্রের সাহায্যে প্রকাশ করা যায়। 

10 ms^{-1} দুটি বেগ হলে A ও B বিন্দুতে বেগের পরিবর্তন 18 ms^{-1}। $s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$, $s_{th} = v_0 + \frac{1}{2}a(2t - 1)$, $h = v_0 - \frac{1}{2}g(2t - 1)$ কোনোটিই পরিবর্তনশীল ত্বরণের গতিশীল বস্তুর জন্য প্রযোজ্য নয়।

৪। 

লেখচিত্র হতে ত্বরণের মান পাওয়া যায়, ঢাল থেকে $= \frac{2}{4} = 0.05$ ms^{-2} এবং এর সমীকরণ $v = v_0 + at$।

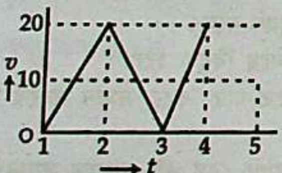
৫। 

পাশের লেখচিত্রে

(ক) A বিন্দুতে বেগ $= \frac{6}{3} = 2$ cms^{-1}

(খ) BC রেখা অংশ বস্তুর স্থির অবস্থা নির্দেশ করে।

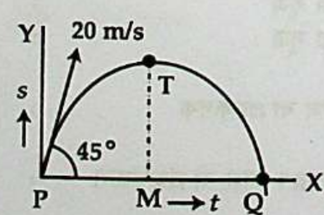
(গ) 10 s এর অতিক্রান্ত দূরত্ব হবে OPBCE এর ক্ষেত্রফল।

৬। 

(ক) লেখচিত্র অনুযায়ী $t = 0$ থেকে $t = 5$ সে. এ বস্তুটি কর্তৃক অতিক্রান্ত দূরত্ব হবে $s = vt = 10 \times 5 = 50$ m

(খ) $t = 0$ থেকে $t = 5$ সে. এ বস্তুটির বেগ $= 10$ ms^{-1}

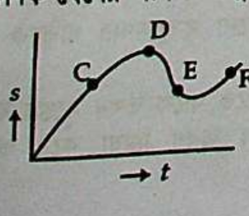
৭। বাতাসের বাধা উপেক্ষা করে একটি পাথরকে পাশের চিত্র অনুযায়ী P বিন্দু হতে তির্যকভাবে ছুঁড়ে দেওয়া হলো। পাথরটির গতিপথের সর্বোচ্চ বিন্দু T এবং পাথরটি ভূমি স্পর্শ করার পূর্ব মুহূর্তে Q বিন্দুতে পৌঁছায়।

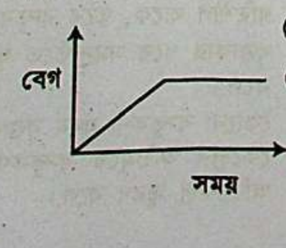


(ক) পাথরটির সর্বাধিক অনুভূমিক পাল্লা হবে 40.8 m. PM = 20.4 m.

(খ) পাথরটির বেগের উল্লম্ব উপাংশ T বিন্দুতে শূন্য। Q বিন্দুতে পৌঁছাতে সময় 2.885 sec

৮। (ক) নিম্নের লেখচিত্রের E বিন্দুতে বস্তুকণাটির তাৎক্ষণিক বেগের মান ঋণাত্মক হবে।



(খ) 

(i) এই চিত্রে বস্তুর আদি বেগ শূন্য।

(ii) বস্তু কখনও থামবে না।

৯। প্রাসের সর্বোচ্চ অবস্থানে বেগ ও ত্বরণের মধ্যবর্তী কোণ $\pi/2$.

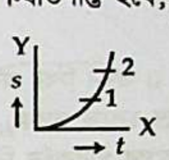
১০। পাল্লা সর্বনিম্ন হলে নিক্ষেপণ কোণ 0° হবে। সর্বোচ্চ উচ্চতায় প্রাসের গতিপথ একমাত্রিক।

১১। প্রাসের নিক্ষেপণ কোণ $\tan^{-1}(4)$ হলে এর সর্বাধিক উচ্চতা ও অনুভূমিক পাল্লার মান পরস্পরের সমান হবে।

১২। স্থির অবস্থান থেকে বিনা বাধায় পড়ন্ত বস্তুর নির্দিষ্ট সময়ে প্রাপ্ত বেগ ওই সময়ের সমানুপাতিক।

১৩। একটি প্রাসকে E গতিশক্তিতে 45° কোণে নিক্ষেপ করা হলো। সর্বোচ্চ বিন্দুতে স্থিতিশক্তি হবে, $\frac{E}{2}$।

১৪। অনুভূমিক বরাবর নিক্ষিপ্ত বস্তুর গতিপথ পরাবৃত্তাকার বা প্যারাবোলা।
অনুভূমিক বরাবর ত্বরণ শূন্য তাই বেগের উপাংশ ধ্রুব থাকে।



১৫। সমত্বরণে চললে উল্লেখিত চিত্রের ক্ষেত্রে লেখচিত্রটি একটি প্যারাবোলা হবে।
প্রাসের সর্বাধিক উচ্চতায় বেগ শূন্য।

১৬। একটি ঘড়ির সেকেন্ডের কাঁটার কৌণিক বেগ $\frac{\pi}{30}$ rad s^{-1} এবং ঘণ্টার কাঁটার কৌণিক বেগ $\frac{\pi}{6}$ rad s^{-1}.

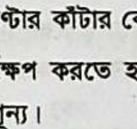
১৭। সর্বাধিক পাল্লার জন্য প্রাসকে অনুভূমিকের সাথে 45° কোণে নিক্ষেপ করতে হবে।

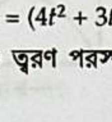
১৮। প্রাসের গতিপথের যেকোনো বিন্দুতে ত্বরণের অনুভূমিক উপাংশ শূন্য।

১৯। একটি গতিশীল বস্তুর সরণের সমীকরণ $x = (4t^2 + 3t)$ m, 2 sec পর বস্তুটির বেগ 19 ms^{-1}।

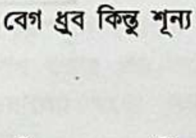
২০। প্রাসের গতিপথের সর্বোচ্চ বিন্দুতে বেগ ও ত্বরণ পরস্পর লম্ব হয় অর্থাৎ মধ্যবর্তী কোণ $\pi/2$ হয়। বেগের উল্লম্ব উপাংশ শূন্য হয়।

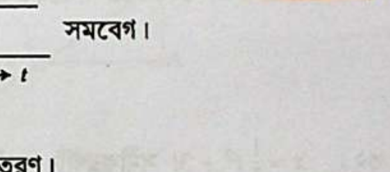
২১। কোনো বস্তু t সেকেন্ডে h উচ্চতা হতে ভূমিতে পড়লে $\frac{t}{2}$ সে. পর বস্তুটি ভূমি হতে $\frac{3h}{4}$ উচ্চতায় ছিল।

২২। একটি বস্তুর বেগ ধ্রুব কিন্তু শূন্য নয়। সে ক্ষেত্রে লেখচিত্রটি হবে  সমবেগ।

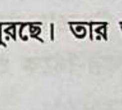
২৩। $v = v_0 + at$ সমীকরণের লেখচিত্র হলো  এই লেখের ঢালই ত্বরণ।

২৪। প্রাসের গতিপথ অধিবৃত্তাকার বা প্যারাবোলা। বৃত্তাকার পথে সমদ্রুতিতে একটি কণা ঘুরছে। তার ত্বরণের অভিমুখ বৃত্তের কেন্দ্রের দিকে। চিত্রে O থেকে A বিন্দুতে যেতে ত্বরণ 10 ms^{-2}।

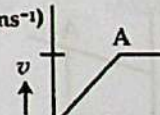
$x^2 = 80\,y$ এবং  B(x, y) থেকে প্রাপ্ত $v_0 = 20$ ms^{-1}

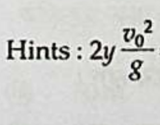


Hints : $2y\frac{v_0^2}{g} = x^2 = 80\,y$

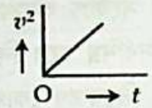
২৫। স্থির অবস্থা হতে t সময়ে চলমান বস্তুর ক্ষেত্রে, $s = ut + \frac{1}{2}at^2$ সমীকরণের লেখচিত্র, 

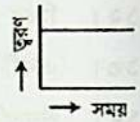
২৬। একটি বস্তু স্থির অবস্থা হতে অসমত্বরণে এমনভাবে গতিশীল যাতে তার ত্বরণের সর্বোচ্চ মান ধীরে ধীরে হ্রাস পেয়ে শূন্য হয়। পাশের বেগ বনাম সময় লেখচিত্র ইহা নির্দেশ করে।

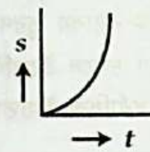


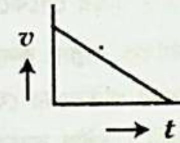


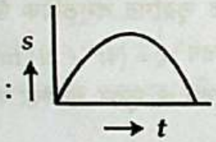
PQ লেখচিত্র $v =$ এর সমীকরণ $v = at$

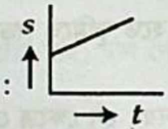
২৭। স্থির অবস্থা হতে সমত্বরণে গতিশীল কোনো বস্তুকণার v^2 বনাম s লেখচিত্র হলো 

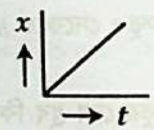
২৮। সোজাপথে চলমান একটি গতিশীল গাড়ির সুষম বেগ বৃদ্ধি পাশের লেখচিত্র দ্বারা প্রকাশ করা যায়। 

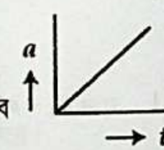
২৯। যখন $t = 0$ তখন স্থির অবস্থান থেকে একটি বস্তু চলতে শুরু করে ধ্রুব ত্বরণে চলতে থাকে। পাশের লেখচিত্রটি সঠিকভাবে সময়ের সাথে সরণের পরিবর্তন নির্দেশ করে। 

৩০। v বেগে একটি বস্তুকে খাড়া উপরের দিকে নিক্ষেপ করা হলো এবং t সময় পর ভূমিতে ফিরে এলো। (ক) এক্ষেত্রে বেগ বনাম সময় লেখচিত্র হলো : 

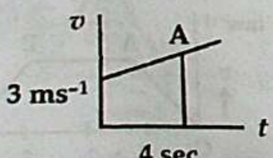
(খ) এক্ষেত্রে সরণ বনাম সময় লেখচিত্র হলো : 

৩১। x বনাম t লেখচিত্রে সমবেগ প্রকাশের লেখচিত্র হলো : 

বা, 

৩২। $x = \frac{1}{3}t^2 + 3t$ সমীকরণটি একটি বস্তুর ধারণ নির্দেশ করলে ত্বরণ বনাম সময়ের লেখচিত্র হবে 

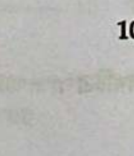
৩৩। সর্বাধিক উচ্চতায় প্রাসের গতি একমাত্রিক। প্রাসের X অক্ষের ত্বরণ $a_x = 0$, Y-অক্ষের ত্বরণ $a_y = -g$। অনুভূমিকের দিকে প্রাসের ত্বরণ না থাকায় অনুভূমিক দিকে বেগের উপাংশ ধ্রুব থাকে।

৩৪। 

(ক) গ্রাফটির ঢাল ত্বরণ $a = \frac{v}{t}$ নির্দেশ করে।

(খ) A বিন্দুতে বেগ হবে $v = u + at = 3 + 2 \times 4 = 11$ ms^{-1}

৩৫। একই নিক্ষেপণ বেগ ও একই পাল্লার জন্য একটি নিক্ষেপণ কোণ 30° হলে অপর কোণ হবে 60°।
ব্যাখ্যা : $\theta = 90° - \alpha$ হলে R একই হয়,
$\therefore \theta = 90° - 30° = 60°$।

৩৬। প্রাসের গতির ক্ষেত্রে অনুভূমিক বেগ বনাম সময় লেখচিত্র হচ্ছে 

৩৭। $x = 12t - 1.2\,t^2$ হলে $t = 3$ sec সময়ে বেগ 4.8 ms^{-1} এবং ত্বরণ -2.4 ms^{-2}।

৩৮। PQ লেখচিত্রের জন্য $v = at$ প্রযোজ্য।