লাল-সবুজে দাগানো
TEXT BOOK

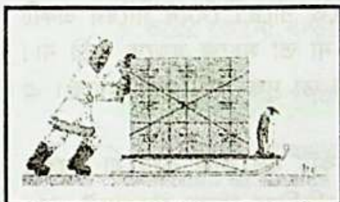
পদার্থবিজ্ঞান
১ম পত্র

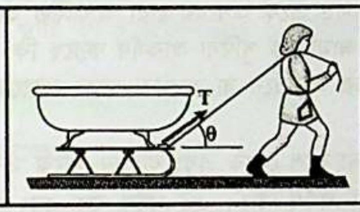
উন্মেষ
মেডিকেল এন্ড ডেন্টাল এডমিশন কেয়ার

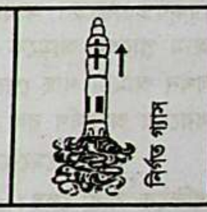
৪

নিউটনিয়ান বলবিদ্যা
NEWTONIAN MECHANICS

প্রধান শব্দ (Key Words) : বল, মৌলিক বল, ভরবেগ, নিউটনের গতির দ্বিতীয় সূত্র, ঘাত, অভিকর্ষ, মহাকর্ষ সূত্র, মহাকর্ষ, মহাকর্ষীয় প্রাবল্য, জড়তার ভ্রামক, কৌণিক ভরবেগ, চক্রগতির ব্যাসার্ধ, টর্ক, কৌণিক ভরবেগের নিত্যতা বা সংরক্ষণ সূত্র, কেন্দ্রমুখি বল, কেন্দ্রবিমুখি বল, সংঘর্ষ, স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষ, অস্থিতিস্থাপক সংঘর্ষ, একমাত্রিক সংঘর্ষ।







সূচনা
Introduction

বিজ্ঞানী স্যার আইজাক নিউটন বস্তুর গতি সংক্রান্ত সূত্র নিয়ে প্রথম আলোচনা করেন। তাঁর আবিষ্কৃত তিনটি সূত্র গতিবিদ্যার স্তম্ভস্বরূপ। পদার্থবিদ্যা ও প্রকৌশলবিদ্যা (engineering)-এর বহু সমস্যা এই সূত্র প্রয়োগ করে সফল-ভাবে সমাধান করা সম্ভব হয়েছে। সরলরৈখিক এবং ঘূর্ণায়মান বস্তুর ক্ষেত্রেও পদার্থবিদ্যার গতি, ভরবেগ এবং সংরক্ষণশীলতার নীতি ব্যাখ্যা ও প্রমাণ নিউটনিয়ান বলবিদ্যার অন্যতম সাফল্য।

এই অধ্যায় পাঠ শেষে শিক্ষার্থীরা—

- বলের স্বজ্ঞামূলক ধারণা ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- নিউটনিয়ান বলবিদ্যায় ব্যবহৃত সূত্রগুলো ক্যালকুলাস ব্যবহার করে বিশ্লেষণ করতে পারবে।
- নিউটনের গতিসূত্রের সীমাবদ্ধতা ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- রৈখিক ও কৌণিক ভরবেগ সংক্রান্ত রাশিমালা ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- কেন্দ্রমুখি ও কেন্দ্রবিমুখি বলের ব্যবহার জানতে পারবে।
- স্থিতিস্থাপক ও অস্থিতিস্থাপক সংঘর্ষ ব্যাখ্যা করতে এবং এ সংক্রান্ত সমস্যা সমাধান করতে পারবে।

ব্যবহারিক : পরীক্ষার সাহায্যে একটি ফ্লাই হুইলের জড়তার ভ্রামক নির্ণয় করতে পারবে।

৪.১ বলের স্বজ্ঞামূলক ধারণা
Intuitive concept of force

স্থিতি জড়তা, গতি জড়তা, সরণ, বেগ, ত্বরণ সম্পর্কে আমরা আগের অধ্যায়ে জেনেছি। একটি ফুটবলকে কিক করলে তা সহজে সামনের দিকে এগিয়ে যায়। আবার একই আকৃতির একটি লোহার বলে আঘাত করে তাকে একইভাবে

চিত্র ৪.১ (ক)

চিত্র ৪.১ (খ)

সচল করা যায় না। একটি জেট প্লেনকে একা ঠেলে নড়ানো যায় না [চিত্র ৪.১(ক)] কিন্তু নির্দিষ্ট বেগে চলন্ত একটি সাইকেলকে পেছন দিক থেকে টেনে থামানো যায় [চিত্র ৪.১(খ)]। এই উদাহরণগুলো থেকে বোঝা যায় যে বস্তুর ভর যত বেশি তার স্থিতি বা গতির অবস্থা পরিবর্তন করা তত কঠিন। অতএব যে বস্তুর ভর যত বেশি হয় তার জড়তাও তত বেশি হয়।

উক্ত ঘটনা থেকে আমরা বুঝতে পারি যে, বস্তু স্থির থাকলে তা গতিশীল করতে বা গতিশীল থাকলে তা স্থির করতে বস্তুর উপর বাইরে থেকে স্পর্শীয়ভাবে কিছু একটা প্রয়োগ করতে হবে। আমাদের দৈনন্দিন কাজকর্মে কখনও কোনো বস্তুকে পাশে ঠেলে রাখি, কখনও টান দিয়ে, কখনও বা উঁচু করে এক স্থান থেকে অন্য স্থানে নিয়ে যাই। সকল ক্ষেত্রে বল প্রয়োগের জন্য বল প্রয়োগকারীর এবং বস্তুর প্রত্যক্ষ সংস্পর্শ প্রয়োজন। অর্থাৎ যে বল সৃষ্টির জন্য দুটি বস্তুর প্রত্যক্ষ সংস্পর্শ প্রয়োজন তাকে বলা হয় **স্পর্শ বল**। স্পর্শ বলের উদাহরণ হলো—ঘর্ষণ বল, সংঘর্ষের ফলে সৃষ্ট বল, টানা বল ইত্যাদি। এক্ষেত্রে বলা যায় কোনো স্থিতিশীল বস্তুকে গতিশীল করতে এবং গতিশীল বস্তুর অবস্থার পরিবর্তন করতে বস্তুর উপর যা প্রযুক্ত করতে হয় তাকেই বল বলে।

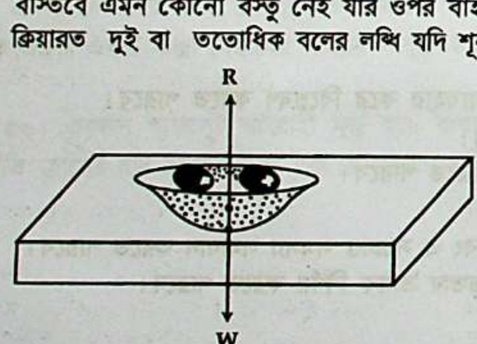
এমনিভাবে প্রকৃতিতেও অনেক ঘটনা ঘটছে যার কারণে দুটি বস্তু একে অপরকে আকর্ষণ করছে বা পরস্পরকে বিকর্ষণ করছে। আবার দুটি বস্তু পাশাপাশি না থাকলেও একে অপরের দ্বারা আকর্ষিত হতে পারে। যেমন গাছের একটি আম পাশের আমকে আকর্ষণ করছে কি-না বা ওই আমটিকে পৃথিবী আকর্ষণ করছে কি-না তা সহজে বুঝতে পারি না। যখন আমটি গাছ থেকে পড়ে তখন দেখা যায় পৃথিবীর আকর্ষণে বা আমের ভরের কারণে তা দ্রুত মাটি স্পর্শ করছে। এ ধরনের আকর্ষণ বল হলো **মহাকর্ষ বল**।

আবার মেঝের ওপর দিয়ে একটি বাক্সকে টানা হলে মেঝে এবং বাক্সের মাঝে একটি বল কাজ করে যা বাক্সের গতিকে বাধা দেয়। এই বাধা প্রদানকারী বলই হলো **ঘর্ষণ বল**। এই ঘর্ষণ বল এবং প্রতিক্রিয়া বলের অনুপাতই হলো **ঘর্ষণ গুণাঙ্ক** (μ)। $\therefore \mu = \frac{f}{R}$।

গতীয় ঘর্ষণের ক্ষেত্রে f_k এবং স্থিতি ঘর্ষণের ক্ষেত্রে f_s হয় এবং প্রতিক্রিয়া R = বস্তুর ওজন $= mg$, হেলানো তলের ক্ষেত্রে $R = mg \cos \theta$ হয়।

পরমাণুর কেন্দ্রে নিউক্লিয়াসের মধ্যে নিউক্লিয়নগুলি পাশাপাশি অবস্থান করে। এক্ষেত্রে তাদের মধ্যে এক ধরনের আকর্ষণের জন্যই তারা বিচ্ছিন্ন হয় না। এ ধরনের আকর্ষণের বিষয়টিই হলো **নিউক্লিও বল**।

বাস্তবে এমন কোনো বস্তু নেই যার ওপর বাইরে থেকে কোনো বল ক্রিয়া না করে। কিন্তু বস্তুর ওপর বাইরে থেকে ক্রিয়ারত দুই বা ততোধিক বলের লব্ধি যদি শূন্য হয়, তাহলে বস্তুর ওপর ওই বলগুলোর ক্রিয়ার কোনো প্রভাব পড়ে না। যেমন একটি টেবিলের উপর দুই দিক থেকে দুটি সমান ও বিপরীতমুখি বল একই রেখায় প্রয়োগ করে একটি টেবিলকে সরাবার চেষ্টা করলে বল দুটির লব্ধি সমান হওয়ায় টেবিলটি স্থির থাকবে। আবার টেবিলের ওপর একটি পাত্র রেখে দিলে তার ওজন (W) নিচের দিকে ক্রিয়া করবে। আবার টেবিল কর্তৃক প্রতিক্রিয়া R ওপরের দিকে টানছে। এক্ষেত্রে W = R হওয়ায় টেবিলের ওপর পাত্রটি স্থির আছে [চিত্র ৪·২]। **এই সকল বল সবই স্পর্শ বল।**



চিত্র ৪·২

নিউটনের গতির প্রথম সূত্র থেকে আমরা বল সম্পর্কে ধারণা করতে পারি। অর্থাৎ **বস্তুর ওপর কিছু প্রয়োগ না করলে স্থির বস্তু চিরকাল স্থির থাকতে চায় আর গতিশীল বস্তু চিরকাল সমবেগে সরল পথে চলতে চায়। এই ধর্মই হলো বস্তুর জড়তা।** তাহলে আমরা সিদ্ধান্ত নিতে পারি যে, বাইরে থেকে যে প্রভাব (influence) ক্রিয়া করলে কোনো বস্তুর স্থিতি বা গতির অবস্থার বা জড়তার পরিবর্তন ঘটে তাকে বল বলে। কোনো বস্তুর ভর যত বেশি হয় তার জড়তা তত বেশি হয়। জড়তা বেশি হলে স্থির বস্তুকে গতিশীল করতে বেশি বল প্রয়োগ করতে হয়।

সংজ্ঞা : যে বাহ্যিক কারণ স্থির বস্তুকে গতিশীল বা গতিশীল বস্তুর অবস্থার পরিবর্তন ঘটায় বা ঘটাবার চেষ্টা করে তাকে বল বলে।

কাজ :

- পিচঢালা রাস্তার ওপর থেমে থাকা একটি সিএনজি চালিত বেবী টেক্সিকে জোরে ঠেলা দাও। কী দেখতে পেলে ? বেবী টেক্সিটা কিছুটা সামনের দিকে এগিয়ে গেল।
- এবার রাস্তায় থেমে থাকা একটি ট্রাককে আগের মতো ঠেলা দাও। আদৌ এটি সরবে না। কয়েকজন মিলে এবার ট্রাকটিকে ঠেলা দাও। দেখবে ট্রাকটি সামনের দিকে এগিয়ে যাবে। এই দুই ক্ষেত্রে গতির ভিন্নতার কারণ কী?

বেবী টেক্সি এবং ট্রাকের মধ্যে ট্রাকের ভর অনেক বেশি। ফলে এর জড়তাও অনেক বেশি। তাই ট্রাককে গতিশীল করতে বেবী টেক্সি অপেক্ষা বেশি বল প্রয়োগ করতে হয়।

বলের বৈশিষ্ট্য বা বল গতির ওপর কী কী প্রভাব বিস্তার করে তার একটি তালিকা তৈরি করা হলো :

(১) প্রযুক্ত বল কোনো স্থির বস্তুকে গতিশীল করতে পারে। অর্থাৎ বল ত্বরণ সৃষ্টি করতে পারে।

(২) বল প্রয়োগের ফলে গতিশীল বস্তুর বেগ হ্রাস বা বৃদ্ধি পায় বা বস্তুর বিকৃতি ঘটাতে পারে।

(৩) প্রযুক্ত বল গতিশীল বস্তুর বেগের তথা গতির দিক পরিবর্তন করতে পারে।

(৪) বল জোড়ায় জোড়ায় ক্রিয়া করে।

একক : বলের এস. আই. একক নিউটন। এফ. পি. এস. পদ্ধতিতে বলের একক পাউন্ডাল।

1 পাউন্ডাল : যে বল 1 পাউন্ড ভরবিশিষ্ট কোনো একটি বস্তুতে প্রযুক্ত হয়ে 1 ফুট/সে^{2} ত্বরণ সৃষ্টি করে তাকে 1 পাউন্ডাল বলে।

মাত্রা : বলের মাত্রা, $[F] = [MLT^{-2}]$

m ভরের কোনো বস্তুর ওপর বল F প্রয়োগ করে a ত্বরণের সৃষ্টি করলে আমরা পাই,

$$F = ma \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (4.1)$$

ভর এবং ত্বরণের গুণফল দ্বারা বল পরিমাপ করা হয়।

৪.১.১ বলের প্রকারভেদ
Kinds of forces

প্রকৃতিতে আমরা বিভিন্ন ধরনের বলের সঙ্গে পরিচিত হলেও এবং এদের বিভিন্ন নামকরণ থাকলেও সব বল কিন্তু মৌলিক বল নয়। **যে সকল বল মূল বা অকৃত্রিম অর্থাৎ অন্য কোনো বল থেকে উৎপন্ন হয় না বরং অন্যান্য বলে এ সকল বলের প্রকাশ ঘটে তাকে মৌলিক বল বলে।**

মৌলিকতা অনুসারে প্রকৃতিতে চার ধরনের বল আছে। অন্য যে কোনো ধরনের বলকে এই চারটি বলের যে কোনো একটি বা একাধিক বল দ্বারা ব্যাখ্যা করা যায়। মৌলিক বলগুলো হলো :

১। মহাকর্ষ বল (Gravitational force)

২। তড়িৎ-চুম্বকীয় বল (Electromagnetic force)

৩। সবল নিউক্লীয় বল (Strong nuclear force)

৪। দুর্বল নিউক্লীয় বল (Weak nuclear force)

১। **মহাকর্ষ বল :** মহাবিশ্বের যে কোনো দুটি বস্তুর মধ্যে এক ধরনের আকর্ষণ বল ক্রিয়াশীল রয়েছে। এই আকর্ষণ বলকে **মহাকর্ষ বল** বলা হয়। এই বলের পরিমাণ ক্রিয়াশীল বস্তু দুটির ভরের গুণফলের সমানুপাতিক এবং বস্তুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্বের বর্গের ব্যস্তানুপাতিক। বিজ্ঞানীরা ধারণা করেন যে বস্তুদ্বয়ের মধ্যে গ্রাভিটন (Graviton) নামক এক প্রকার কণার পারস্পরিক বিনিময়ের দ্বারা এই মহাকর্ষ বল ক্রিয়াশীল হয়। মহাকর্ষ বল মাধ্যমের প্রকৃতির ওপর নির্ভরশীল নয়। **ইহা খুব দুর্বল ও আকর্ষণধর্মী বল।**

২। **তড়িৎ-চুম্বকীয় বল :** দুটি আহিত বা চার্জিত বস্তুর মধ্যে এবং দুটি চুম্বক পদার্থের মধ্যে এক ধরনের বল ক্রিয়াশীল থাকে। এদেরকে যথাক্রমে কুলম্বের তড়িৎ এবং চৌম্বক বল বলা হয়। তড়িৎ এবং চৌম্বক বল আকর্ষণ এবং বিকর্ষণ উভয় ধরনের হতে পারে। তড়িৎ এবং চৌম্বক বল পরস্পর ঘনিষ্ঠভাবে সম্পর্কিত। বস্তুত আপেক্ষিক গতিতে পরিভ্রমণরত দুটি আহিত কণার মধ্যে ক্রিয়াশীল বলই হচ্ছে **তড়িৎ-চুম্বকীয় বল**। যখন তড়িৎ আধান বা চার্জগুলো গতিশীল হয়, তখন তারা চৌম্বক ক্ষেত্র সৃষ্টি করে। আবার পরিবর্তী (varying) চৌম্বক ক্ষেত্র তড়িৎ ক্ষেত্রের উৎস হিসেবে কাজ করে। ধারণা করা হয় যে, ভরহীন, চার্জহীন ফোটন নামক এক প্রকার কণার পারস্পরিক বিনিময়ের মাধ্যমে এই বল কার্যকর হয়।

স্থিতিস্থাপক বল, আণবিক গঠন, রাসায়নিক বিক্রিয়া ইত্যাদিতে তড়িৎ-চুম্বকীয় বলের প্রকাশ ঘটে।

৩। **সবল নিউক্লীয় বল :** একটি পরমাণুর নিউক্লিয়াস প্রোটন ও নিউট্রন দ্বারা গঠিত। এদেরকে সমষ্টিগতভাবে বলা হয় নিউক্লিয়ন (Nucleon)। নিউক্লিয়াসের মধ্যে সমধর্মী ধনাত্মক আধানযুক্ত প্রোটনগুলো খুব কাছাকাছি থাকায় এদের মধ্যে কুলম্বের বিকর্ষণ বল প্রবল হওয়া উচিত এবং নিউক্লিয়াস ভেঙ্গে যাওয়ার কথা। কিন্তু বাস্তবে অনেক নিউক্লিয়াসই স্থায়ী। নিউক্লিয়নের মধ্যে যে মাধ্যাকর্ষণ বল কাজ করে তা এত নগণ্য যে এই বল কুলম্বের বিকর্ষণ বলকে প্রতিমিত (balance) করতে পারে না। সুতরাং নিউক্লিয়াসে অবশ্যই অন্য এক ধরনের সবল বল কাজ করে যা নিউক্লিয়াসকে ধরে রাখে। এই বলকে বলা হয় **সবল নিউক্লীয় বল**। বিজ্ঞানীদের ধারণা যে নিউক্লিয়নের মধ্যে মেসন (Meson) নামে এক প্রকার কণার পারস্পরিক বিনিময়ের দ্বারা এই বল ক্রিয়াশীল হয়। এই বল আকর্ষণধর্মী, স্বল্প পাল্লা-বিশিষ্ট (short range), চার্জ নিরপেক্ষ এবং নিউক্লিয়াসের বাইরে ক্রিয়াশীল নয়।

৪। **দুর্বল নিউক্লীয় বল :** প্রকৃতিতে বেশ কিছু মৌলিক পদার্থ (elements) রয়েছে যাদের নিউক্লিয়াস স্বতঃস্ফূর্তভাবে ভেঙ্গে যায় (যেমন ইউরেনিয়াম, থোরিয়াম ইত্যাদি)। এই সমস্ত নিউক্লিয়াসকে বলা হয় **তেজস্ক্রিয় নিউক্লিয়াস**। তেজস্ক্রিয় নিউক্লিয়াস থেকে তিন ধরনের রশ্মি বা কণা নির্গত হয় যাদেরকে আলফা রশ্মি (α-rays), বিটা রশ্মি (β-rays) এবং গামা রশ্মি (γ-rays) বলা হয়।

তেজস্ক্রিয় নিউক্লিয়াস থেকে যখন বিটা কণা নির্গত হয় তখন একই সঙ্গে শক্তিও নির্গত হয়। কিন্তু পরীক্ষালব্ধ ফলাফল থেকে দেখা যায় যে, নিউক্লিয়াস থেকে যে পরিমাণ শক্তি নির্গত হয় তা বিটা কণার গতিশক্তির চেয়ে বেশি।

স্বাভাবিকভাবেই বিজ্ঞানীদের মাঝে প্রশ্ন ওঠে যে β-কণা যদি শক্তির সামান্য অংশ বহন করে, তবে অবশিষ্ট শক্তি যায় কোথায় ? 1930 সালে ডব্লিউ. পাউলি (W. Pauli) প্রস্তাব করেন যে অবশিষ্ট শক্তি অন্য এক ধরনের কণা বহন করে যা β-কণার সঙ্গেই নির্গত হয়। এই কণাকে বলা হয় নিউট্রিনো (neutrino)। এই β-কণা এবং নিউট্রিনো কণার নির্গমন চতুর্থ একটি মৌলিক বলের কারণে ঘটে যাকে বলা হয় **দুর্বল নিউক্লীয় বল**। এই বল সবল নিউক্লীয় বা তড়িৎ-চুম্বকীয় বলের তুলনায় খুবই দুর্বল। এই বলের কারণে অনেক নিউক্লিয়াসের ভাঙ্গন প্রক্রিয়া সংঘটিত হয়। ধারণা করা হয় যে, বোসন নামক এক প্রকার কণার পারস্পরিক বিনিময়ের মাধ্যমে এই বল কার্যকর হয়।

জেনে রাখ :

I. সবল নিউক্লীয় বলের কারণে প্রোটন ও নিউট্রন একত্রে আবদ্ধ হয়ে নিউক্লিয়াস গঠন করে। এই বলের বাহক কণিকা হলো মেসন, গ্লুওন।

II. দুর্বল নিউক্লীয় বলের কারণে বিটা ক্ষয় হয়। এই বলের বাহক কণিকা W ও Z বোসন।

III. তড়িৎ চৌম্বক বলের কারণে ইলেকট্রন নিউক্লিয়াসের সাথে আবদ্ধ হয়ে পরমাণু গঠন করে। এই বলের কণিকা ফোটন।

IV. মহাকর্ষ বল নক্ষত্রগুলোকে একত্রিত করে গ্যালাক্সি গঠন করে। এই বলের বাহক কণিকা গ্রাভিটন।

৪.১.২ মৌলিক বলসমূহের তীব্রতার তুলনা
Comparison of the intensities of the fundamental forces

চারটি মৌলিক বলের পরিমাপের আপেক্ষিক সবলতা তুলনা করলে দেখা যায় যে সবচেয়ে শক্তিশালী বল হচ্ছে সবল নিউক্লীয় বল এবং সবচেয়ে দুর্বল হলো মহাকর্ষ বল।

সবল এবং দুর্বল উভয় ধরনের নিউক্লীয় বলের ক্রিয়ার পাল্লা (range) খুবই স্বল্প (very short)। এগুলো নিউক্লিয়াসের পৃষ্ঠের বাইরে ক্রিয়াশীল হয় না। পক্ষান্তরে মহাকর্ষ এবং তড়িৎ-চুম্বকীয় বলের পাল্লা প্রায় অসীম।

চারটি মৌলিক বলের আপেক্ষিক সবলতা সম্বন্ধে ধারণা লাভের জন্য যদি মহাকর্ষ বলের সাপেক্ষে সবল নিউক্লীয় বলের মান 10^{41} ধরা হয়, তবে দুর্বল নিউক্লীয় বল, তড়িৎ-চুম্বকীয় বল এবং মহাকর্ষ বলের আপেক্ষিক সবলতার মান হবে যথাক্রমে 10^{30}, 10^{39} ও 1. আবার সরল নিউক্লীয় বলের সাপেক্ষে মহাকর্ষ বলের মান 10^{-41} হলে দুর্বল নিউক্লীয় বল, তড়িৎ চৌম্বক বল ও সবল নিউক্লীয় বলের মান হবে যথাক্রমে 10^{-11}, 10^{-2}, 1।

চারটি মৌলিক বলের মধ্যে সম্পর্ক স্থাপনের জন্য বিজ্ঞানীরা বহু বছর ধরে চেষ্টা চালিয়ে যাচ্ছেন। প্রফেসর আব্দুস সালাম, ওয়াইনবার্গ ও গ্লাসো তিনজন বিজ্ঞানী দীর্ঘদিন গবেষণা করে দুর্বল নিউক্লিয় বল এবং তড়িৎ-চুম্বকীয় বলের মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন করেছেন যা সালাম-ওয়াইনবার্গের তত্ত্ব নামে পরিচিত। মহাকর্ষ বলের পাল্লা অসীম, তড়িৎ চুম্বকীয় বলের পাল্লা অসীম, সবল নিউক্লীয় বলের পাল্লা 10^{-15} m, দুর্বল নিউক্লীয় বলের পাল্লা 10^{-16} m।

৪.১.৩ ভরবেগ
Momentum

মনে কর, দুটি বস্তুর মধ্যে কোনো কারণে সংঘর্ষ ঘটল। সংঘর্ষের পর বস্তুদ্বয় কোনদিকে যাবে তা কীসের দ্বারা নির্ধারণ করবে ? এদের ভর দ্বারা না এদের বেগ দ্বারা ? একটি গতিশীল সাইকেল অপেক্ষা একটি গতিশীল রিকশার ধাক্কা অনেক বেশি কেন ? গতিশীল সাইকেল অপেক্ষা গতিশীল রিকশা থামানো কঠিন কেন ? এ সকল ঘটনার কারণ হলো ভরবেগ।

তাহলে ভরবেগ কী ? বলা যায় ভর ও বেগের সমন্বয়ে কোনো গতিশীল বস্তুতে সৃষ্ট গতির পরিমাণই হলো বস্তুর ভরবেগ। ভর স্থির রেখে বেগ বাড়ালে বস্তুর ভরবেগও বাড়ে। একই বস্তু বেশি বেগে চললে তার ভরবেগ বেশি হয়। বেগ যতগুণ বেশি হয় বস্তুটিকে একই সময়ে থামাতে আগের থেকে ততগুণ বেশি বল প্রয়োগ করতে হয়। একটি গাড়ি যদি দ্বিগুণ বেগে চলে, তাহলে গাড়িটিকে থামাতে আগের থেকে দ্বিগুণ বল প্রয়োগ করতে হয়। রাইফেলের গুলির ভর খুব কম, কিন্তু বেগ অত্যন্ত বেশি, ফলে ভরবেগ বেশি হওয়ায় রাইফেলের গুলির আঘাত প্রচণ্ড হয়।

সংজ্ঞা : বস্তুর ভর ও বেগের সমন্বয়ে বস্তুতে যে ধর্মের উদ্ভব হয় তাকে বস্তুর ভরবেগ বলে। বস্তুর ভর ও বেগের গুণফল দ্বারা ভরবেগ পরিমাপ করা হয়। গতি জড়তা ভরবেগের সমানুপাতিক। ইহা একটি ভেক্টর রাশি।

একক : ভরবেগের এস. আই. একক $kg\text{-}ms^{-1}$

মাত্রা : $[P] = [MLT^{-1}]$

৪.২ নিউটনের গতিসূত্র
Newton's laws of motion

1687 সালে স্যার আইজ্যাক নিউটন তাঁর বিখ্যাত ও অমর গ্রন্থ 'ন্যাচারালিস ফিলোসোফিয়া প্রিন্সিপিয়া ম্যাথেমেটিকা'তে বস্তুর ভর, গতি ও বলের মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন করে তিনটি সূত্র প্রকাশ করেন। এই তিনটি সূত্র নিউটনের গতিসূত্র নামে পরিচিত।

প্রথম সূত্র (First law) : বাহ্যিক বল প্রয়োগে বস্তুর অবস্থার পরিবর্তন করতে বাধ্য না করলে স্থির বস্তু চিরকাল স্থিরই থাকবে এবং গতিশীল বস্তু সমবেগে অর্থাৎ সমদ্রুতিতে সরলপথে চলতে থাকবে।

দ্বিতীয় সূত্র (Second law) : বস্তুর ভরবেগের পরিবর্তনের হার তার ওপর প্রযুক্ত বলের সমানুপাতিক এবং বল যেদিকে ক্রিয়া করে বস্তুর ভরবেগের পরিবর্তনও সেদিকে ঘটে।

তৃতীয় সূত্র (Third law) : প্রত্যেক ক্রিয়ারই একটা সমান ও বিপরীত প্রতিক্রিয়া আছে।

অনুসন্ধানমূলক কাজ : স্থির মোটর গাড়িতে বসে থাকা কোনো আরোহী ভেতর থেকে ঠেলে গাড়িটি গতিশীল করতে পারে কী? ব্যাখ্যা কর।

মোটর গাড়ির ভেতরে বসা কোনো আরোহী গাড়ির ওপর বল প্রয়োগ করলে নিউটনের গতির তৃতীয় সূত্র অনুসারে গাড়ি ও আরোহীর ওপর সমান ও বিপরীত বল ক্রিয়াশীল হয়। এই দুই ক্রিয়া–প্রতিক্রিয়া বলের প্রভাবে গাড়ি ও আরোহীর সমন্বয়ে গঠিত সিস্টেমের মোট ভরবেগের কোনো পরিবর্তন হয় না। ফলে গাড়িও গতিশীল হয় না। তাই গাড়িটি স্থিরই থাকবে।

প্রথম গতিসূত্রের আলোচনা
Discussion of the first law of inertia

নিউটনের গতির প্রথম সূত্র থেকে আমরা জানতে পারি যে, বস্তুর ওপর কোনো বাহ্যিক বল প্রযুক্ত না হলে বস্তুটি নিজের অবস্থানের পরিবর্তন করতে পারে না। বস্তুটি স্থিতিশীল অবস্থায় থাকলে সর্বদাই স্থিতিশীল, আবার গতিশীল অবস্থায় থাকলে সর্বদাই একই সরলরেখা বরাবর সুষম বেগে গতিশীল থাকতে চায়। বস্তুর এই বিশেষ ধর্মের জন্য বস্তু তার স্থিতিশীলতা বা গতীয় অবস্থা পরিবর্তন করার চেষ্টাকে বাধা দেয়। বস্তুর এই বিশেষ ধর্মকে জড়তা (inertia) বলা হয়। প্রথম সূত্র থেকে বস্তুর এই জড়তার ধর্ম জানা যায়। তাই একে **জড়তা বা জাড্যের সূত্র (law of inertia)** বলে।

৪·২·১ নিউটনের গতির দ্বিতীয় সূত্র
Newton's second law of motion

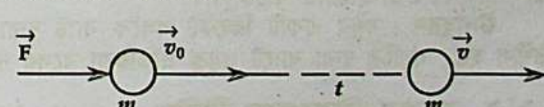
সূত্র : ভরবেগের পরিবর্তনের হার বস্তুর ওপর প্রযুক্ত বলের সমানুপাতিক। এই বল যেদিকে ক্রিয়া করে ভরবেগের পরিবর্তনও সেদিকে ঘটে।

এই সূত্রের সাহায্যে বলের অভিমুখ, পরিমাণ, গুণগত বৈশিষ্ট্য, ত্বরণের সঙ্গে বলের সম্পর্ক, একক বল, বলের একক ও বলের নিরপেক্ষ নীতি সম্বন্ধে জানতে পারা যায়।

$\vec{F} = m\vec{a}$ সমীকরণ প্রতিপাদন (ক্যালকুলাস পদ্ধতিতে)

মনে করি কোনো একটি বস্তুর ভর m এবং এটি $\vec{v}_0$ সমবেগে চলছে [চিত্র ৪.৩]।

ধরি একটি ধ্রুব বল (constant force) $\vec{F}$ এই বস্তুর ওপর তার গতির দিকে t সময় ধরে ক্রিয়া করল। ফলে বস্তুর বেগ পরিবর্তিত হয়ে $\vec{v}$ হলো।



চিত্র ৪.৩

কাজেই $\vec{v}$ বেগে গতিশীল বস্তুটির ভরবেগ $\vec{P} = m\vec{v}$ ... ... (4.2)

সুতরাং ভরবেগের পরিবর্তনের হার $\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$

ভরবেগের পরিবর্তনের হার প্রযুক্ত বলের সমানুপাতিক

$$\therefore \quad \vec{F} \propto \frac{d\vec{P}}{dt} = k\frac{d\vec{P}}{dt} = k\frac{d}{dt}(m\vec{v})$$

$$\therefore \quad \vec{F} = km\frac{d\vec{v}}{dt} = km\vec{a} \quad \ldots \quad \ldots \quad (4.3) \quad \left[\text{এখানে } k = \text{ ধ্রুবক, } \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}\right]$$

একক বলের সংজ্ঞা থেকে নিম্নোক্তভাবে $k = 1$ দেখানো যায়।

যখন $m = 1$ একক, $|\vec{a}| = 1$ একক, তখন $|\vec{F}| = 1$ একক।

$\therefore$ সমীকরণ (4.4)-এ মানগুলো বসিয়ে আমরা পাই,

$$1 = k\,.\,1 \times 1$$

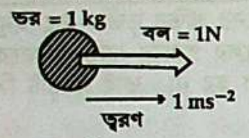
$$\therefore \quad k = 1$$

$$\therefore \quad \vec{F} = m\vec{a} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (4.4)$$

বস্তুটির ওপর একটি বল প্রযুক্ত না হয়ে যদি $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3 \ldots \vec{F}_n$ ইত্যাদি বল প্রযুক্ত হয় তাহলে বস্তুটির ওপর ক্রিয়াশীল নিট বল $= \sum \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 \ldots + \vec{F}_n$.

$\therefore$ নিউটনের দ্বিতীয় সূত্র হলো $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ ... ... [4.4(a)]

এখানে ত্বরণের দিক নিট বলের বরাবর। নিউটনের দ্বিতীয় সূত্রের সাহায্যে একক বলের সংজ্ঞা পাওয়া যায়।



চিত্র ৪·৪

একক ভরের কোনো বস্তুর ওপর একক ত্বরণ সৃষ্টি করতে যে বল প্রযুক্ত হয়, তাকে একক বল বলে। অর্থাৎ,

এস. আই. পদ্ধতিতে, $m = 1$ kg

$|a| = 1$ ms^{-2} হলে,

$F = 1$ N, [চিত্র ৪·৪]

সুতরাং সমীকরণ (4.3) অনুযায়ী আমরা পাই,

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (4.5)$$

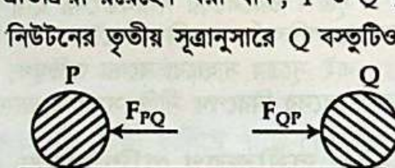
অর্থাৎ বল = ভর × ত্বরণ

এটিই হলো বলের মান নির্দেশক সমীকরণ।

জেনে রাখ : নিউটনের গতির দ্বিতীয় সূত্র বলের একক, একক বলের সংজ্ঞা, বলের অভিমুখ, বলের নিরপেক্ষ নীতি ইত্যাদি জানা যায়।

তৃতীয় গতিসূত্রের আলোচনা
Discussion of third law of motion

নিউটনের তৃতীয় গতিসূত্র অনুযায়ী প্রত্যেক ক্রিয়ার সমান ও বিপরীত প্রতিক্রিয়া রয়েছে। ধরা যাক, P ও Q দুটি বস্তু রয়েছে। P বস্তু কর্তৃক Q বস্তুর ওপর প্রযুক্ত বল $\vec{F}_{QP}$ [চিত্র ৪·৫]। নিউটনের তৃতীয় সূত্রানুসারে Q বস্তুটিও P বস্তুটির ওপর একটি প্রতিক্রিয়া বল প্রয়োগ করে। Q বস্তু কর্তৃক P বস্তুর ওপর প্রযুক্ত প্রতিক্রিয়া বল $\vec{F}_{PQ}$ হলে আমরা পাই, $\vec{F}_{PQ} = -\vec{F}_{QP}$।



চিত্র ৪·৫

উল্লেখ্য, ক্রিয়া বল এবং প্রতিক্রিয়া বল সর্বদা জোড়ায় জোড়ায় উপস্থিত থাকে। যতক্ষণ ক্রিয়া স্থায়ী হয়, ততক্ষণই প্রতিক্রিয়া স্থায়ী হয়। ক্রিয়া না থাকলে প্রতিক্রিয়াও থাকে না।

উদাহরণ : যখন একটি ক্রিকেট বলকে ব্যাট দ্বারা আঘাত করা হয়, তখন বলটি সামনের দিকে উচ্চ বেগে গতিশীল হয়। বলটির দ্বারা ব্যাটে প্রযুক্ত প্রতিক্রিয়া বলের দরুন ব্যাট পিছনের দিকে গতিশীল হয়।

৪.২.২ বলের নিরপেক্ষ নীতি
Independent principle of force

নিউটনের দ্বিতীয় সূত্রানুসারে সময়ের সাথে বস্তুর ভরবেগের পরিবর্তন বলের ক্রিয়া অভিমুখে সংঘটিত হবে। কাজেই বলের ক্রিয়া অভিমুখে বস্তুতে যে ভরবেগ থাকবে সময়ের সাথে তা-ই শুধু পরিবর্তিত হবে। একাধিক বলের ক্ষেত্রেও একের ক্রিয়া অন্যের দ্বারা প্রভাবিত হবে না। বস্তুর ওপর বলের ক্রিয়ার এই বৈশিষ্ট্যকে বলের নিরপেক্ষ নীতি বা ভৌত অনির্ভরশীলতা বলা হয়।

নিউটনের গতির দ্বিতীয় সূত্র থেকে আমরা যা জানতে পারলাম তা হলো :

(i) বস্তুর ত্বরণ প্রযুক্ত বলের সমানুপাতিক হয়।
(ii) বলের ক্রিয়া বন্ধ হয়ে গেলে বস্তুটির ত্বরণ বা মন্দন থাকে না।
(iii) বলের অভিমুখই ত্বরণের অভিমুখ।
(iv) বস্তুর ওপর বল ক্রিয়া করলে বস্তুটি ত্বরণ নিয়ে চলতে থাকে।

গাণিতিক উদাহরণ ৪.১

১। একটি বস্তু স্থিরাবস্থায় ছিল। 15 N-এর একটি বল এর ওপর 4 সেকেন্ড ধরে কাজ করে এবং তারপর আর কোনো কাজ করল না। এরপর বস্তুটি সমবেগে 9 সেকেন্ডে 54 m দূরত্ব গেল। বস্তুটির ভর বের কর।

[RUET Admission Test, 2012-13]

যেহেতু বলটি বস্তুর ওপর 4s ক্রিয়ার পর আর ক্রিয়া করে না সেহেতু বস্তুটি শেষ 9s সময় সমবেগে যাবে।

$$\therefore v = \frac{s}{t_2}$$

$$= \frac{54}{9} = 6 \text{ ms}^{-1}$$

এখানে,
$F = 15$ N
$t_1 = 4$ s
$t_2 = 9$ s
$s = 54$ m
$v_0 = 0$ (যেহেতু বস্তু স্থির)

আমরা জানি, $v = v_0 + at_1$

বা, $6 = 0 + a \times 4$

বা, $6 = 4a$ বা, $a = \frac{6}{4}$

$\therefore a = 1.5\ ms^{-2}$

আবার, $F = ma$

বা, $15 = m \times 1.5$ বা, $m = \frac{15}{1.5}$

$\therefore m = 10\ kg$

২। একটি বস্তুর ওপর 7N মানের একটি বল প্রয়োগ করা হলে বস্তুটি $3\ ms^{-2}$ ত্বরণ প্রাপ্ত হয়। বস্তুটির ভর কত ? বস্তুটির ওপর 5N মানের আর একটি বল 7N মানের বলের সাথে 60° কোণে প্রয়োগ করলে বস্তুটির ত্বরণ কত হবে ? [চ. বো. ২০১০; রা. বো. ২০০৯; সি. বো. ২০০৩]

প্রথম অংশ :

আমরা জানি,

$F = ma$

$\therefore 7 = m \times 3$

$\therefore m = \frac{7}{3} = 2.33\ kg$

এখানে,
$F = 7N$
$a = 3\ ms^{-2}$
$m = ?$

দ্বিতীয় অংশ :

মনে করি, লব্ধি বল R

এখন, $R = (P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha)^{\frac{1}{2}}$

$\therefore R = (7^2 + 5^2 + 2 \times 7 \times 5 \times \cos 60°)^{\frac{1}{2}}$

$= \left(49 + 25 + 2 \times 7 \times 5 \times \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$

$= (74 + 35)^{\frac{1}{2}} = (109)^{\frac{1}{2}} = 10.44\ N$

এখানে,
$P = 7N$
$Q = 5N$
$\alpha = 60°$

আবার, $R = ma'$

$\therefore a' = \frac{R}{m} = \frac{10.44}{2.33}\ ms^{-2}$

$= 4.48\ ms^{-2}$

এখানে,
$R = 10.44N$
$m = 2.33\ kg$
$a' = ?$

উত্তর : বস্তুটির ভর 2.33 kg এবং ত্বরণ $4.48\ ms^{-2}$

৩। 10 N এর একটি বল 2 kg ভরের একটি স্থির বস্তুর উপর ক্রিয়া করে। 4 s পর যদি বলের ক্রিয়া বন্ধ হয়ে যায় তবে প্রথম থেকে 8 s-এ বস্তুটি কত দূরত্ব অতিক্রম করবে ?

আমরা জানি,

$F = ma$

বা, $a = \frac{F}{m} = \frac{10}{2} = 5\ ms^{-2}$

$\therefore$ ১ম 4 s-এ অতিক্রান্ত দূরত্ব,

$s_1 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$

$= 0 \times 4 + \frac{1}{2} \times 5 \times 4^2 = 40\ m$

এখানে,
বল, $F = 10\ N$
ভর, $m = 2\ kg$
১ম ক্ষেত্রে,
আদিবেগ, $v_0 = 0$
সময়, $t = 4\ s$
ত্বরণ, $a = ?$
দূরত্ব, $s_1 = ?$

১ম 4 s পর বস্তুটির বেগ,

$v = v_0 + at = 0 + 5 \times 4 = 20\ ms^{-1}$

পরবর্তী 4 s-এ অতিক্রান্ত দূরত্ব,

$s_2 = vt = 20 \times 4 = 80\ m$

$\therefore$ ১ম থেকে মোট 8 s-এ অতিক্রান্ত দূরত্ব,

$s = s_1 + s_2 = 40 + 80 = 120\ m$

২য় ক্ষেত্রে,
বেগ, $v = 20\ ms^{-1}$
সময়, $t = 4\ s$
দূরত্ব, $s_2 = ?$

৪। 60 kg ভরের একটি বস্তুর ওপর কত বল প্রয়োগ করলে 1 মিনিটে এর বেগ $10\ ms^{-1}$ বৃদ্ধি পাবে ?

আমরা জানি,

$$F = ma = \frac{m\Delta v}{t} = \frac{60 \times 10}{60} = 10\ N$$

এখানে,
ভর, $m = 60\ kg$
সময়, $t = 1\ min = 60\ sec$
বেগ বৃদ্ধি, $\Delta v = 10\ ms^{-1}$

৫। 980 N ওজনের একটি বস্তুকে $1\ ms^{-2}$ ত্বরণ দিতে কত বল প্রয়োগ করতে হবে ?

আমরা জানি,
$W = mg$
বা, $m = \frac{W}{g} = \frac{980}{9.8} = 100\ kg$

আবার আমরা জানি,
$F = ma$
$\therefore\ F = 100 \times 1 = 100\ N$

এখানে,
বস্তুর ওজন, $W = 980\ N$
ত্বরণ, $a = 1\ ms^{-2}$
$F = ?$

৬। 14 g ভরের একটি রাইফেলের গুলি $3.6\ ms^{-1}$ বেগে 0.21 m পুরু একটি কাঠের গুঁড়ি ভেদ করতে পারে। বাধাদানকারী বলের মান নির্ণয় কর।

আমরা জানি,
কৃত কাজ, $W = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$
বা, $Fs = \frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2)$
বা, $F = \frac{\frac{1}{2} \times 14 \times 10^{-3}[0 - (3.6)^2]}{0.21}$
$= -0.432\ N$

এখানে,
$m = 14\ g = 14 \times 10^{-3}\ kg$
$v_0 = 3.6\ ms^{-1}$
$v = 0$
$s = 0.21\ m$

৭। 4 kg ভরের একটি বস্তুকে $10\ ms^{-2}$ ত্বরণে গতিশীল করতে কত বল প্রয়োগ করতে হবে ? [পথের ঘর্ষণ বল $2.5\ N\ kg^{-1}$] [ব. বো. ২০০১]

আমরা জানি,
কার্যকর বল, $F = P - F_k$
$\therefore\ 40 = P - 10$
বা, $P = 50\ N$
$\therefore$ প্রযুক্ত বল = 50N

এখানে,
বস্তুর ভর, $m = 4\ kg$
ত্বরণ, $a = 10\ ms^{-2}$
$\therefore$ কার্যকর বল, $F = ma = 4 \times 10 = 40N$
ঘর্ষণ বল = $2.5\ N\ kg^{-1}$
$\therefore$ মোট ঘর্ষণ বল, $F_K = 2.5 \times 4 = 10N$
প্রযুক্ত বল, $P = ?$

৮। 70 kg ভরের একটি বাক্সকে 500 N অনুভূমিক বলে মেঝের ওপর দিয়ে টানা হচ্ছে। বাক্সটি যখন চলে তখন বাক্স ও মেঝের মধ্যবর্তী ঘর্ষণ সহগ 0.50। বাক্সের ত্বরণ নির্ণয় কর। [ঢা. বো. ২০১১; সি. বো. ২০০৯; দি. বো. ২০০৯; রা. বো. ২০০৭; য. বো. ২০০৪]

আমরা জানি,
ঘর্ষণ বল, $F_k = \mu_k R$
বা, $F_k = 0.50 \times 686\ N$
$= 343\ N$

আবার, লব্ধি বল,
$F = F_1 - F_k$
$= (500 - 343)\ N$
$= 157\ N$

এখন, $F = ma$
বা, $a = \frac{F}{m} = \frac{157\ N}{70\ kg} = 2.24\ ms^{-2}$

এখানে,
$m = 70\ kg$
$\mu_k = 0.50$
অভিলম্ব প্রতিক্রিয়া, $R = 70 \times 9.8\ N = 686\ N$
অনুভূমিক বল, $F_1 = 500\ N$
ত্বরণ, $a = ?$

৯। 40 g ভরের একটি গুলি 400 ms^{-1} প্রাথমিক বেগে একটি দেওয়ালকে 4×10^4 N গড় বলের সাহায্যে ভেদ করে 40 ms^{-1} বেগে তা দেওয়াল থেকে নির্গত হয়। দেওয়ালটির বেধ কত ? অন্য একটি গুলি একই প্রাথমিক বেগ ও একই বল নিয়ে দেওয়ালটিকে ভেদ করতে পারে না। গুলিটির সর্বোচ্চ ভর কত ?

প্রথম অংশ :

এখানে,

প্রাথমিক বেগ, $v_0 = 400\ ms^{-1}$

$m = 40\ g = 0.04\ kg$

$F = 4 \times 10^4\ N$

চূড়ান্ত বেগ, $v = 40\ ms^{-1}$

দেওয়ালের বেধ, $x = ?$

দেওয়ালের মধ্যে গুলিটির মন্দন,

$$a = \frac{F}{m} = \frac{4 \times 10^4}{0.04} = 1 \times 10^6\ ms^{-2}$$

আবার,

$$v^2 = v_0^2 + 2ax$$

বা, $$x = \frac{v_0^2 - v^2}{2a} = \frac{(400)^2 - (40)^2}{2 \times 1 \times 10^6}$$

$$= 7.92 \times 10^{-2}\ m$$

দ্বিতীয় অংশ :

ধরা যাক, দ্বিতীয় গুলিটির ভর $= m$ এবং চূড়ান্ত বেগ $v = 0$

$\therefore$ দ্বিতীয় ক্ষেত্রে মন্দন, $a_1 = \frac{v_0^2}{2x}$

এবং গুলিটির ভর, $m_1 = \frac{F}{a_1} = \frac{F}{\frac{v_0^2}{2x}} = \frac{F \times 2x}{v_0^2}$

বা, $$m_1 = \frac{4 \times 10^4 \times 2 \times 7.92 \times 10^{-2}}{(400)^2}$$

$$= \frac{4 \times 10^2 \times 2 \times 7.92}{4 \times 4 \times 10^4} = 0.0486 = 48.6\ g$$

১০। একটি বস্তু স্থিরাবস্থায় ছিল। 15 N এর বল এর ওপর 4 sec ধরে কাজ করে। তারপর আর কোনো কাজ করল না। বস্তুটি এরপর 9 sec এ 54 m দূরত্ব গেল। বস্তুটির ভর নির্ণয় কর। [RUET Admission Test, 2012-13]

আমরা জানি,

$$F = ma \quad \therefore m = \frac{F}{a}$$

বা, $a = \frac{F}{m} = \frac{15}{m}$

4 sec পর বেগ $v = 0 + at = \frac{15}{m} \times 4 = \frac{60}{m}$

আবার, $s = vt$

বা, $54 = \frac{60}{m} \times 9$

$\therefore m = 10\ kg$

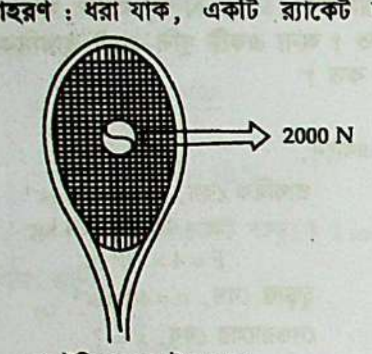
কাজ : ক্রিকেট খেলায় ক্যাচ ধরার সময় খেলোয়াড় হাতটাকে পিছনে টেনে নেয় কেন?

নিউটনের দ্বিতীয় সূত্রানুসারে ত্বরণ কম হলে প্রযুক্ত বল কম হবে। বেগের পরিবর্তন ধ্রুব হলে, এই পরিবর্তনে যত বেশি সময় নেওয়া হবে, ত্বরণের মান তত কম হবে। তাই ক্রিকেট খেলায় ক্যাচ ধরার সময় খেলোয়াড় হাতটাকে পিছনে টেনে নেয়, যাতে বেগের নির্দিষ্ট পরিবর্তনে বেশি সময় লাগে, ফলে ত্বরণ এবং প্রতিক্রিয়া বল কম মানের হয়।

৪.২৩ ঘাত বল
Impulsive force

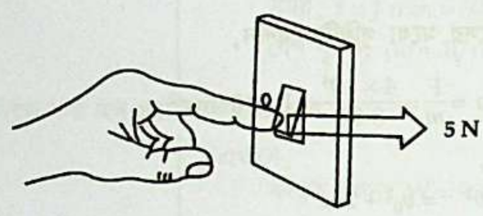
সংঘর্ষ, বিস্ফোরণ, আকস্মিক আঘাত প্রভৃতি ক্ষেত্রে এ ধরনের বল ক্রিয়া করে। ক্যারম খেলার স্ট্রাইকার দিয়ে গুটিকে আঘাত করা, ক্রিকেট বা টেবিল টেনিস খেলার ব্যাট দিয়ে বলকে আঘাত করা, ফুটবলকে কিক করা, হাতুড়ি দিয়ে পেরেক ঠোকা, বাদ্যযন্ত্রের তারে আঘাত করা প্রভৃতি বিশেষ ধরনের বল। একে ঘাত বল (Impulsive force) বলে। অর্থাৎ খুব অল্প সময়ের জন্য খুব বড় মানের যে বল কোনো বস্তুর উপর প্রযুক্ত হয় তাকে ঘাত বল বলে।

উদাহরণ : ধরা যাক, একটি র‍্যাকেট দ্বারা টেনিস বলকে আঘাত করলে প্রচণ্ড একটি বল টেনিস বলের ওপর



(ক) টেনিস বলের উপর বল

চিত্র ৪.৬(ক)



(খ) আলো জ্বালাতে সুইচের উপর বল

চিত্র ৪.৬(খ)

আরোপিত হয়। এক্ষেত্রে টেনিস বল এবং র‍্যাকেটের মধ্যকার সংঘর্ষের সময় খুব কম হয়। এই ধরনের বল ঘাত বল [চিত্র ৪.৬(ক)]। আবার ইলেকট্রিক সুইচ যখন অফ বা অন করা হয় তখনও এই ঘাত বল ক্রিয়াশীল হয় [চিত্র ৪.৬(খ)]।

৪.২.৪ বলের ঘাত
Impulse of force

কোনো বল ও বলের ক্রিয়াকালের গুণফলকে ওই বলের ঘাত (impulse of force) বলে। $\vec{F}$ বল কোনো বস্তুর উপর t সময় ধরে ক্রিয়া করলে

বলের ঘাত, $\vec{J} = \vec{F} \times t$ ... ... (4.6)

$$= \frac{m\vec{v} - m\vec{v}_0}{t} \times t = m\vec{v} - m\vec{v}_0 = \text{ভরবেগের পরিবর্তন}$$

∴ বলের ঘাত ভরবেগের পরিবর্তনের সমান।

ক্যালকুলাস পদ্ধতি : মনে করি, $\vec{F}$ ধ্রুব বল কোনো একটি বস্তুর ওপরে dt সময় ক্রিয়া করে। তাহলে ঘাত

বল, $\vec{J} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\vec{P}}{dt} \times dt = \int_{\vec{p}_1}^{\vec{p}_2} d\vec{P} = \left[\vec{P}\right]_{\vec{p}_1}^{\vec{p}_2} = \vec{P}_2 - \vec{P}_1 = \Delta\vec{P}$

∴ বলের ঘাত ভরবেগের পরিবর্তনের সমান।

৪.২.৫ বলের ঘাত ও ঘাত বলের মধ্যে পার্থক্য
Difference between impulse of a force and impulsive force

১। বলের ঘাত হলো বল ও বলের ক্রিয়াকালের গুণফল। কিন্তু ঘাত বল হলো একটি বৃহৎ মানের অত্যন্ত ক্ষণস্থায়ী বল।

২। ঘাত বল বলের ঘাত সৃষ্টি করে। এই বল বেশি হলে বলের ঘাতও বৃদ্ধি পাবে। তাই বলা হয় যে ঘাত বল হচ্ছে কারণ এবং বলের ঘাত এর ফল।

৩। ঘাত বলের একক এবং বলের একক একই; অর্থাৎ নিউটন। কিন্তু বলের ঘাত একক ভরবেগের এককের অনুরূপ, অর্থাৎ $kgms^{-1}$।

৪। বলের ঘাতের জন্য বায়ুতে ভরবেগের পরিবর্তন ঘটে; কিন্তু ঘাত বলের ফলে বস্তুতে খুবই অল্প সময়ে বৃহৎ ত্বরণ সৃষ্টি হয়।

৫। ঘাত বলের মাত্রা $[MLT^{-2}]$ এবং বলের ঘাতের মাত্রা $[MLT^{-1}]$.

কাজ : কম্বল থেকে ধুলো ঝাড়ার জন্য লাঠি দিয়ে কম্বলকে আঘাত করা হয় কেন ? ব্যাখ্যা কর।

কম্বলকে লাঠি দিয়ে আঘাত করলে ধুলোকণাগুলো স্থির জড়তার জন্য স্থির থাকলেও ঘাত বলের জন্য কম্বলের সুতা হঠাৎ গতিশীল হয়, ফলে ধুলোকণা কম্বল থেকে আলাদা হয়।

গাণিতিক উদাহরণ ৪.২

১। 16 N-এর একটি বল 4 kg ভরের ওপর 4 s ক্রিয়া করে। বস্তুটির (ক) বেগের পরিবর্তন ও (খ) বলের ঘাত নির্ণয় কর।

এখানে,
বল, $\vec{F} = 16\text{ N}$
$m = 4\text{ kg}$
$t = 4\text{ s}$

(ক) মনে করি বেগের পরিবর্তন $= \vec{v} - \vec{v}_0$

আমরা জানি,

বলের ঘাত = ভরবেগের পরিবর্তন

$\therefore \; F \times t = mv - mv_0$

বা, $F \times t = m(v - v_0)$

$\therefore$ বেগের পরিবর্তন, $(v - v_0) = \dfrac{F \times t}{m} = \dfrac{16\text{N} \times 4\text{ s}}{4\text{ kg}} = 16\text{ ms}^{-1}$

(খ) আবার আমরা জানি,

বলের ঘাত, $J = F \times t$

$\therefore \; J = 16\text{N} \times 4\text{ s}$
$= 64\text{ Ns}$

২। 0·05 kg ভরের একটি বস্তু 0·2 ms⁻¹ অনুভূমিক বেগে একটি খাঁড়া দেয়ালে ধাক্কা দিয়ে 0·1 ms⁻¹ বেগে বিপরীত দিকে ফিরে গেল। বলের ঘাত বের কর। [ব. বো. ২০০৬]

এখানে,
$m = 0{\cdot}05\text{ kg}$
$v_0 = 0{\cdot}2\text{ ms}^{-1}$
$v = -0{\cdot}1\text{ ms}^{-1}$ (আদি বেগের সাপেক্ষে শেষ বেগ বিপরীতমুখি হেতু ঋণচিহ্ন ব্যবহৃত হয়েছে)।

ধরি বলের ঘাত = J

আমরা পাই, $J = F \times t$ ও $F = \dfrac{m(v - v_0)}{t}$

$\therefore \; J = m(v - v_0)$
$= 0{\cdot}05 \times (-0{\cdot}1 - 0{\cdot}2)$
$= -0{\cdot}015\text{ kg-ms}^{-1}$ (ঋণচিহ্ন প্রমাণ করে যে, J ও v-এর অভিমুখ অভিন্ন)।

$\therefore \; |J| = 0{\cdot}015\text{ kg-ms}^{-1}$

৩। একজন সাইকেল চালক 8 ms⁻¹ বেগে চলাকালে সাইকেল চালানো বন্ধ করে লক্ষ করেন যে 49 m দূরত্ব অতিক্রমের পর সাইকেলটি থেমে যায়। সাইকেলের টায়ার ও রাস্তার মধ্যকার ঘর্ষণ বল ও 2 sec সময়ে বলের ঘাত নির্ণয় কর। [আরোহীসহ সাইকেলের ভর = 147 kg]

এখানে, $v = 0$
$v_0 = 8\text{ ms}^{-1}$
$m = 147\text{ kg}$
$s = 49\text{ m}$

ধরি ঘর্ষণ বল = F ও F-এর জন্য সৃষ্ট মন্দন = a

আমরা পাই, $v^2 = {v_0}^2 - 2as$ ... ... (i)

$\therefore$ সমীকরণ (i) হতে পাই,

$F = ma = \dfrac{m({v_0}^2 - v^2)}{2s}$

$= 147\text{ kg}\; \dfrac{\{(8\text{ ms}^{-1})^2 - 0\}}{2 \times 49\text{ m}} = 96\text{N}$

$\therefore$ ঘর্ষণ বল, $F = 96\text{ N}$ এবং 2 sec সময়ে বলের ঘাত $= F \times t = 96 \times 2 = 192\text{ N-s}$

৪। 10 ms⁻¹ বেগে আগত 150 g ভরের একটি ক্রিকেট বলকে একটি ব্যাট দিয়ে আঘাত করা হলো। বলটি 18 ms⁻¹ বেগে ফিরে গেল। ব্যাটে-বলে সংঘাতের স্থায়িত্বকাল 0·01 s হলে ব্যাট দ্বারা ক্রিকেট বলের ওপর প্রযুক্ত গড় বলের মান বের কর।

এখানে,
আদিবেগ, $v_0 = 10\text{ ms}^{-1}$
ক্রিকেট বলের ভর, $m = 150\text{ g} = 0{\cdot}150\text{ kg}$
শেষ বেগ, $v = -18\text{ ms}^{-1}$
গড় বেগ, F = ?

আমরা জানি,

$F \times t = mv - mu$

$F = \dfrac{m(v - u)}{t}$

$= \dfrac{0{\cdot}15 \times (-18 - 10)}{{\cdot}01} = -420\text{ N}$

$\therefore \; |F| = 420\text{ N}$

৫। দুটি বিলিয়ার্ড বল যার প্রত্যেকটির ভর 0·04 kg সরলরেখা বরাবর বিপরীত দিক থেকে 5 ms⁻¹ বেগে এসে সংঘর্ষ ঘটায় এবং একই বেগে বিপরীত দিকে চলে যায়। একটি বল কর্তৃক অন্যটির ওপর বলের ঘাত কত ?

একটি বলের প্রাথমিক ভরবেগ,

$P_1 = mv_0$

এবং সংঘর্ষের পরে ওই বলের ভরবেগ,

$P_2 = mv$

$\therefore$ ভরবেগের পরিবর্তন, $P_1 - P_2 = mv_0 - mv$

অতএব, বলের ঘাত, $J = mv_0 - mv$

$= 0{\cdot}04\,\{5-(-5)\}$

$= 0{\cdot}4\ \text{kgms}^{-1}$

এখানে,
$m = 0{\cdot}04$ kg
$v_0 = 5\ \text{ms}^{-1}$
$v = -5\ \text{ms}^{-1}$

৬। দুটি বিলিয়ার্ড বল যার প্রতিটির ভর 0·06 kg একই সরলরেখায় বিপরীত দিক থেকে 5 ms⁻¹ বেগে এসে সংঘর্ষে লিপ্ত হলো এবং একই বেগে বিপরীত দিকে চলতে শুরু করল। একটি বল কর্তৃক অপরটির ওপর বলের ঘাত কত ?

একটি বলের প্রাথমিক ভরবেগ,

$P_1 = mu$

এবং সংঘাতের পরে ভরবেগ, $P_2 = mv$

$\therefore$ ভরবেগের পরিবর্তন $= P_1 - P_2 = mu - mv$

$\therefore$ বলের ঘাত, $J = mu - mv = 0{\cdot}06 \times \{5-(-5)\}$

$= 0{\cdot}06 \times 10 = 0{\cdot}6\ \text{kg ms}^{-1}$

এখানে,
$m = 0{\cdot}06$ kg
$u = 5\ \text{ms}^{-1}$
$v = -5\ \text{ms}^{-1}$

৭। একটি বাহক (conveyor) বেল্ট অনুভূমিকভাবে 12 cm s⁻¹ বেগে চলছে। ওপর থেকে উল্লম্বভাবে 0·4 kgs⁻¹ হারে পাথর বেল্টের ওপর ফেলা হচ্ছে। বেল্টের ওপর কত বল ক্রিয়া করবে ?

পাথরের প্রাথমিক অনুভূমিক বেগ, $u = 0$

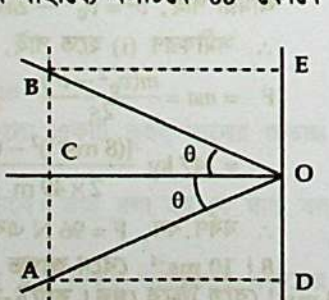
বেল্টে পড়ার পর পাথরের অনুভূমিক বেগ, $v = 12\ \text{cms}^{-1} = 0{\cdot}12\ \text{ms}^{-1}$

এখন, পাথরের ভরের পরিবর্তন $= 0{\cdot}4\ \text{kg s}^{-1}$

$\therefore$ প্রতি সেকেন্ডে ভরবেগের পরিবর্তন = ভরের পরিবর্তনের হার × গতিবেগ

$= 0{\cdot}4 \times 0{\cdot}12 = 0{\cdot}048$ Newton

৮। 0·20 kg ভরের একটি ক্রিকেট বল 20 ms⁻¹ বেগে ছুটে যাচ্ছিল। ব্যাটের সাহায্যে বলটিকে 60° কোণে একই বেগে বিক্ষিপ্ত করলে বলটির ওপর কত ঘাত প্রযুক্ত হবে ?



চিত্র অনুযায়ী, বলটি AO বরাবর $u = 20\ \text{ms}^{-1}$ চলমান অবস্থায় ব্যাটের গায়ে O বিন্দুতে আঘাত করে এবং একই বেগে OB বরাবর ছুটে যায়।

প্রাথমিক বেগ AO-এর সমকৌণিক উপাংশদ্বয়,

$AC = DO = u \sin\theta$ (DO বরাবর) এবং $AD = CO = u\cos\theta$ (CO বরাবর)

চূড়ান্ত বেগ OB-এর সমকৌণিক উপাংশদ্বয়,

$OE = u\sin\theta$ (OE বরাবর) এবং $OC = u\cos\theta$ (OC বরাবর)

সুতরাং ব্যাটের গা OE বরাবর বেগের পরিবর্তন,

$= u\sin\theta - u\sin\theta = 0$, অর্থাৎ OE বরাবর ভরবেগের পরিবর্তনও শূন্য

ব্যাটের সমকোণে ভরবেগের পরিবর্তন $= mu\cos\theta - (-mu\cos\theta)$

$= 2\,mu\cos\theta$

$\therefore$ বলের ঘাত $= 2\,mu\cos\theta$

$= 2 \times 0{\cdot}20 \times 20 \times \cos 30°$

$= 2 \times 0{\cdot}20 \times 20 \times 0{\cdot}866$

$= 6{\cdot}928\ \text{kg ms}^{-1}$

এখানে,
$m = 0{\cdot}20$ kg
$u = 20\ \text{ms}^{-1}$
$\theta = \frac{60°}{2} = 30°$

৪.৩ নিউটনের গতির সূত্রগুলোর মধ্যে সম্পর্ক
Relation between Newton's laws of motion

নিউটনের গতিসূত্রগুলোর মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন করতে হলে সূত্রগুলো সম্পর্কে সম্যক ধারণা অবশ্যই থাকতে হবে এবং সূত্রগুলো কী কী বিষয় নিয়ে আলোচনা করে সে সম্পর্কেও আমাদের জ্ঞান থাকা আবশ্যক।

নিউটনের গতির প্রথম সূত্র থেকে আমরা বুঝতে পারি যে, বাইরে থেকে কোনো প্রভাব ক্রিয়া না করলে কোনো বস্তু নিজের অবস্থার পরিবর্তন চায় না। স্থির বস্তু স্থির থাকবে আবার গতিশীল বস্তু গতিশীল অবস্থায় চলতে থাকবে। বস্তুর জড়তা ধর্মের কারণে এরূপ ঘটে। এই জড়তার বিরুদ্ধে কিছু করতে হলে অর্থাৎ স্থির বস্তুকে গতিশীল করতে হলে আবার গতিশীল বস্তুর গতির পরিবর্তন ঘটাতে হলে তার ওপর বল প্রয়োগ করতে হবে। এই ধারণা থেকে নিউটনের গতির ২য় সূত্র প্রয়োগ করতে পারি। কোনো বস্তুর ভর যত বেশি হয় তার ভরবেগও তত বেশি হবে। মনে করি গতিশীল অবস্থায় একটি বস্তুর ভর m এবং বেগ v; আর একটি বস্তুর ভর 2 m কিন্তু বেগ একই অর্থাৎ বেগ v। তাহলে প্রথম বস্তুর ভরবেগ $= mv$ এবং দ্বিতীয় বস্তুর ভরবেগ $= 2\,mv$। বাধা দিয়ে অর্থাৎ বল প্রয়োগ করে বস্তু দুটিকে যদি একই সময়ের মধ্যে থামানো হয় তবে দ্বিতীয়টির ভরবেগের পরিবর্তনের হার প্রথমটির দ্বিগুণ হবে। দ্বিতীয় সূত্র থেকে আমরা জানি যে, প্রযুক্ত বল বস্তুর ভরবেগের পরিবর্তনের হারের সমানুপাতিক হয়। অতএব দ্বিতীয় বস্তুটিকে একই সময়ের মধ্যে থামাতে গেলে প্রথম বস্তুর থেকে দ্বিগুণ বল প্রয়োগ করতে হয়। আবার যদি সমান দুটি বল (F) বস্তু দুটির ওপর প্রয়োগ করা হয় তাহলে প্রথম বস্তুর ত্বরণ a_1 এবং দ্বিতীয় বস্তুর ত্বরণ a_2 হলে নিউটনের দ্বিতীয় সূত্র অনুসারে $F = ma_1$ এবং $F = 2\,ma_2$ হবে।

সুতরাং দেখা যায় যে, বস্তুর জড়তার সাথে ভরবেগের ও ত্বরণের মধ্যে একটি সম্পর্ক বিদ্যমান যার মাধ্যমে নিউটনের ১ম ও ২য় সূত্রের মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন করা যায় বা এক সূত্র হতে অন্য সূত্রে রূপান্তর করা যায়।

অন্যভাবে বস্তু দুটিকে যদি F_1 ও F_2 বলে একই সরলরেখা বরাবর প্রয়োগ করা হয়, তাহলে চলতে চলতে কোনো এক সময় বস্তু দুটি সংঘর্ষে লিপ্ত হতে পারে। যখনই সংঘর্ষে লিপ্ত হয় তখন ২য় বস্তুটি ১ম বস্তুর উপর সমান ও বিপরীতমুখি প্রতিক্রিয়া বল প্রয়োগ করে। এক্ষেত্রে যে বলের কারণে দ্বিতীয় বস্তু আঘাতপ্রাপ্ত হয়, তাকে **ক্রিয়া বল** বলে আর এই বস্তুটি আঘাতপ্রাপ্তির পর বিপরীত দিকে প্রথম বস্তুর ওপর যে বল প্রয়োগ করে তাকে **প্রতিক্রিয়া বল** বলে। নিউটনের তৃতীয় সূত্র অনুযায়ী জানা যায় এই ক্রিয়া এবং প্রতিক্রিয়া সমান।

উপরের ঘটনা থেকে লক্ষ করা যায় যে, বস্তুর জড়তা বল প্রয়োগে ত্বরণ সৃষ্টি এবং ক্রিয়া ও প্রতিক্রিয়ার সকল কর্মকাণ্ডই নিউটনের গতির প্রথম, দ্বিতীয় ও তৃতীয় সূত্রের পারস্পরিক সম্পর্কিত ঘটনা।

গাণিতিক উদাহরণ ৪.৩

১। 5 kg ভরের একটি হাতুড়ি 5 m উঁচু থেকে একটি পেরেকের ওপর আপতিত হলো এবং $\frac{1}{20}$ সেকেন্ডে স্থির হলো। পেরেকের ওপর প্রযুক্ত বল নির্ণয় কর। ($g = 10\ \text{ms}^{-2}$)

হাতুড়ির প্রাথমিক বেগ, $u = 0$

পেরেকের ওপর পড়ার মুহূর্তে হাতুড়ির বেগ v হলে, আমরা পাই,

$$v^2 = u^2 + 2gs = 0 + 2 \times 10 \times 5 = 100$$

$$\therefore \quad v = \sqrt{100} = 10\ \text{ms}^{-1}$$

হাতুড়িটি $\frac{1}{20}$ সেকেন্ডে স্থির হয়।

সুতরাং, হাতুড়িটির গতির জন্য পেরেকের ওপর প্রযুক্ত বল,

$$F = \frac{\text{ভরবেগের পরিবর্তন}}{\text{সময়}} = \frac{m(v-u)}{t}$$

$$= \frac{5\,(10-0)}{\frac{1}{20}} = 50 \times 20 = 1000\ \text{N}$$

২। 8 cm ব্যাসের একটি হোস পাইপ অনুভূমিকভাবে একটি খাড়া দেওয়ালের ওপর 8 ms^{-1} বেগে পানি ফেলছে। আঘাতের পর দেওয়ালের লম্ব দিকে পানির বেগ শূন্য হলে দেওয়ালে কত বল ক্রিয়া করে ? (পানির ঘনত্ব 1000 kg m^{-3})

ধরা যাক, হোস পাইপের প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল $= A\ \text{m}^2 = \pi r^2\ \text{m}^2$

এবং নির্গত পানির বেগ $= 8\ \text{ms}^{-1}$

অতএব, প্রতি সেকেন্ডে যে পরিমাণ পানি দেওয়ালে আঘাত করে তার ভর,

$$m = A \times v \times \rho = 3.14 \times (4 \times 10^{-2})^2 \times 8 \times 1000$$

আঘাতের পর দেওয়ালের লম্ব দিকের পানির বেগ = 0

∴ প্রতি সেকেন্ডে দেওয়ালে আঘাতকারী পানির ভরবেগের পরিবর্তন

$A v^2 \rho = \pi r^2 \times v^2 \times \rho$

∴ দেওয়ালে প্রযুক্ত বল, $F = A v^2 \rho = \pi r^2 v^2 \rho$

$= 3.14 \times (4 \times 10^{-2})^2 \times 8^2 \times 1000$

$= 3.14 \times 16 \times 10^{-4} \times 64 \times 1000$

$= 321.5 \text{ N}$

গাণিতিকভাবে নিউটনের গতিসূত্রগুলোর মধ্যে পারস্পরিক সম্পর্ক

গাণিতিকভাবে নিউটনের গতিসূত্রগুলোর মধ্যে নিম্নোক্ত উপায়ে পারস্পরিক সম্পর্ক স্থাপন করা যায়।

■ ২য় সূত্র এবং ১ম সূত্রের মধ্যে সম্পর্ক :

নিউটনের গতির ২য় সূত্র থেকে জানি ভরবেগের পরিবর্তনের হার প্রযুক্ত বলের সমানুপাতিক.

অর্থাৎ $= \dfrac{m\vec{v} - m\vec{v_0}}{t} \propto \vec{F}$ ∴ $\dfrac{m(\vec{v} - \vec{v_0})}{t} \propto \vec{F}$

বা, $m\vec{a} = k\vec{F}$, $k = 1$ হলে

$\vec{F} = m\vec{a}$, এখানে $\vec{F}$ = প্রযুক্ত বল, $\vec{a}$ = ত্বরণ, $\vec{v_0}$ = আদিবেগ, $\vec{v}$ = শেষ বেগ

বাইরে থেকে বল প্রযুক্ত না হলে $\vec{F} = 0$ হয় এবং $\vec{a} = 0$ হয়।

কিন্তু বস্তুর ভর শূন্য হয় না তাই $m \neq 0$, সুতরাং $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = 0$ অর্থাৎ $\vec{v}$ = ধ্রুবক ... (4.7)

তাই বলা যায় বাহ্যিক বলের ক্রিয়া না থাকলে বেগের কোনো পরিবর্তন হয় না। স্থির বস্তু স্থির আর গতিশীল বস্তুর গতির কোনো পরিবর্তন হয় না। অর্থাৎ বাহ্যিক বলের অনুপস্থিতিতে বস্তুকণার ভরবেগ সব সময় সমান বা ধ্রুব থাকে।

■ ১ম সূত্র এবং ৩য় সূত্রের মধ্যে সম্পর্ক :

নিউটনের গতির ১ম সূত্র থেকে আমরা জানি বাহ্যিক বল ক্রিয়া না করলে ভরবেগ ধ্রুব থাকে।

অর্থাৎ ভরবেগ, $\vec{P} = m\vec{v}$ = ধ্রুবক ... ... (4.8)

t এর সাপেক্ষে ব্যবকলন করে পাই

$$\therefore \quad \frac{d\vec{P}}{dt} = m\frac{d(\vec{v})}{dt} \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (4.9)$$

আবার দুটি বস্তুর মধ্যে একটি বস্তু যখন অপরটির ওপর বল প্রয়োগ করে তখন লব্ধি ভরবেগের পরিবর্তনের হারের মান সমান ও বিপরীত হয়।

$$\therefore \quad \frac{d\vec{P_1}}{dt} = -\frac{d\vec{P_2}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(m_1\vec{v_1}) = -\frac{d}{dt}(m_2\vec{v_2}) \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad [4.9(a)]$$

বা, $m_1\vec{a_1} = -m_2\vec{a_2}$ বা, $\vec{F_1} = -\vec{F_2}$, অর্থাৎ ক্রিয়া বল = প্রতিক্রিয়া বল।

∴ [4.9(a)] এই সমীকরণ দ্বারা নিউটনের গতির ১ম ও ৩য় সূত্রের মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন করা যায়।

■ ২য় সূত্র এবং ৩য় সূত্রের মধ্যে সম্পর্ক :

নিউটনের গতির ২য় সূত্র থেকে আমরা জানি, ভরবেগের পরিবর্তনের হারই হলো প্রযুক্ত বল। ঘাত বল বিবেচনা করলে লেখা যায়, ঘাত বল = ভরবেগের পরিবর্তন। এক্ষেত্রে যে বলের কারণে ঘাত সৃষ্টি হয় বিপরীত ক্রমে সেই বলের কারণে প্রতিঘাত সৃষ্টি হয়। এক্ষেত্রে বলা যায় ক্রিয়া = প্রতিক্রিয়া। ইহাই নিউটনের ৩য় সূত্র।

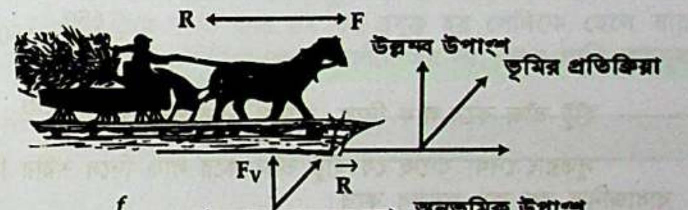
৪.৪ নিউটনের গতিসূত্রের ব্যবহার
Applications of Newton's laws of motion

একটি বস্তু যখন অন্য একটি বস্তুর ওপর বল প্রয়োগ করে তখন দ্বিতীয় বস্তুটিও প্রথম বস্তুটির ওপর একটি সমান ও বিপরীতমুখি বল প্রয়োগ করে। এই ক্রিয়া ও প্রতিক্রিয়া সংক্রান্ত বলের বিবরণ আমরা নিউটনের তৃতীয় সূত্র থেকে জেনেছি। প্রকৃতিতে বল সব সময় জোড়ায় জোড়ায় ক্রিয়া করে। প্রকৃতিতে একক বিচ্ছিন্ন বল বলে কিছু থাকতে পারে না। দুটি বলের একটি অপরের পরিপূরক। এদের একটি ক্রিয়া অপরটি প্রতিক্রিয়া বল। ক্রিয়া বল যতক্ষণ থাকে প্রতিক্রিয়া বলও ততক্ষণ স্থায়ী হয়। নিউটনের গতিসূত্রের কয়েকটি ব্যবহারিক প্রয়োগ উদাহরণের সাহায্যে বর্ণনা করা হলো।

১। ঘোড়ার গাড়ির চলাচল :

ঘোড়ার গাড়ি রাস্তায় যখন চলে তখন ঘোড়ার কাঁধে বেল্ট বা হাতলের ওপর F বল প্রয়োগ করে গাড়িটিকে সামনের দিকে নিয়ে যায়; সাথে সাথে গাড়িও ঘোড়াকে পেছনের দিকে সমান ও বিপরীতমুখি F বলে টানতে থাকে। স্বাভাবিকভাবে প্রশ্ন করা যায় যে, গাড়িটি সামনের দিকে কী করে এগোয় ? নিচের চিত্রটি লক্ষ কর।

আরোহীসহ গাড়িটি সামনের দিকে এগোয় কী করে? : গাড়িটিকে সামনের দিকে চালাবার জন্য ঘোড়া মাটির ওপর তির্যকভাবে বল প্রয়োগ করে। সঙ্গে সঙ্গে মাটি ঘোড়ার ওপর সমান ও বিপরীতমুখি প্রতিক্রিয়া বল R প্রয়োগ করে। এই বলকে অনুভূমিক দিকে এবং উল্লম্ব দিকে যথাক্রমে F_H এবং F_V উপাংশে বিশ্লেষণ করা যায়। উল্লম্ব উপাংশ F_V ঘোড়ার ওজনকে প্রশমিত করে। এখন যদি অনুভূমিক উপাংশ F_H ঘোড়ার ওপর গাড়ি দ্বারা পেছনের দিকে প্রযুক্ত প্রতিক্রিয়া বল (R)-এর চেয়ে বেশি হয়, তাহলে $F_H - R$ বলের ক্রিয়ায় ঘোড়া সামনের দিকে এগিয়ে যায় অর্থাৎ গাড়িটি সামনের দিকে এগিয়ে যায় [চিত্র ৪.৭]।



চিত্র ৪.৭

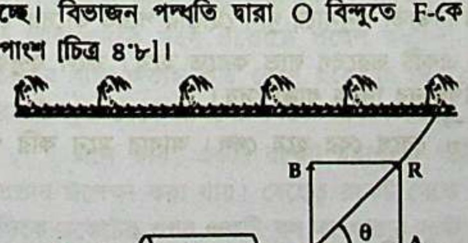
এখন গাড়ির গতি পৃথকভাবে বিবেচনা করলে দেখা যায় যে, এর ওপর দুটি বল ক্রিয়া করছে—

(i) মাটির সংস্পর্শে থাকার দরুন চাকার উপর ঘর্ষণ বল f; এই বল গাড়ির গতিকে বাধা দেয়।

(ii) ঘোড়া দ্বারা প্রযুক্ত বল F; এই বল গাড়িকে সামনের দিকে এগিয়ে নিতে চেষ্টা করে।

২। নৌকার গুণ টানা :

মনে করি M একটি নৌকা। এর O বিন্দুতে গুণ বেঁধে OR বরাবর নদীর পাড় দিয়ে $\vec{F}$ বলে টেনে নেওয়া হচ্ছে। বিভাজন পদ্ধতি দ্বারা O বিন্দুতে F-কে দুটি উপাংশে বিভাজিত করা যায়; যথা—অনুভূমিক উপাংশ ও উল্লম্ব উপাংশ [চিত্র ৪.৮]।



চিত্র ৪.৮

অনুভূমিক উপাংশ $= F\cos\theta$, এর দিক OA বরাবর।

উল্লম্ব উপাংশ $= F\sin\theta$, এর দিক OB বরাবর।

বলের অনুভূমিক উপাংশ $F\cos\theta$ নৌকাকে সামনের দিকে এগিয়ে নিয়ে যায় এবং উল্লম্ব উপাংশ $F\sin\theta$ নৌকাটিকে পাড়ের দিকে টানে। কিন্তু নৌকার হাল দ্বারা উল্লম্ব উপাংশ $F\sin\theta$ প্রতিহত করা হয়। গুণ যত লম্বা হবে, θ-এর মান তত কম হবে ফলে $F\sin\theta$-এর মান কম হবে এবং $F\cos\theta$-এর মান বেশি হবে। ফলে নৌকা দ্রুত সামনের দিকে এগিয়ে যাবে।

কাজ : নৌকার গুণ টানার ক্ষেত্রে নৌকার গতি কীভাবে বৃদ্ধি পায় ?

৩। অ্যাথলেটের লং জাম্প দেওয়া :

একজন অ্যাথলেট লং জাম্প দেওয়ার পূর্বে বেশ কিছু দূর থেকে দৌড় দেয়। এর উদ্দেশ্য হলো গতি জড়তা অর্জন করা যার দরুন সে জাম্প দেওয়ার পর বেশ খানিকটা দূরত্ব অতিক্রম করতে সক্ষম হয়।

গাণিতিক উদাহরণ ৪.৪

১। 65 kg ভরের এক ব্যক্তি ভূপৃষ্ঠের 5 m ওপর থেকে লাফিয়ে পড়ল। ভূমি স্পর্শ করার সময় হাঁটু ভাঁজ না করলে তার শরীর মাত্র $\frac{1}{8}$ s–এ স্থির হয়। তবে ভূমি স্পর্শ করার সময় হাঁটু ভাঁজ করলে তার শরীর স্থির হতে 1 s সময় নেয়। উভয় ক্ষেত্রে ভূপৃষ্ঠ ব্যক্তিটির ওপর কত বল প্রয়োগ করে ? ($g = 10\ ms^{-2}$)

স্থিরাবস্থা থেকে লাফ দিয়ে ভূপৃষ্ঠে পড়ার মুহূর্তে বেগ v হলে,

$$v^2 = 0 + 2 \times 10 \times 5 \qquad [\because v^2 = u^2 + 2gs]$$
$$= 100$$
$$\therefore\ v = 10\ ms^{-1}$$

সুতরাং, ভরবেগের পরিবর্তন $= mv - mu$
$= 65 \times 10 - 0$
$= 650$ Ns

হাঁটু ভাঁজ না করলে, ব্যক্তির ওপর প্রযুক্ত বল $= \dfrac{\text{ভরবেগের পরিবর্তন}}{\text{সময়}}$

$$= \frac{650}{\frac{1}{8}} = 650 \times 8 = 5200\ \text{N}$$

হাঁটু ভাঁজ করে লাফ দিলে, ব্যক্তির ওপর প্রযুক্ত বল $= \frac{650}{1} = 650$ N

সুতরাং দেখা যাচ্ছে যে হাঁটু ভাঁজ করে লাফ দিলে শরীর স্থিরাবস্থায় আসতে বেশি সময় নেয়, ফলে লোকটি বাধাজনিত বল কম অনুভব করে।

৪। বন্দুক থেকে গুলি ছোড়া :

বন্দুক থেকে গুলি ছুড়লে গুলিটি প্রচণ্ড বেগে সামনে ছুটে যায়। বন্দুকটি গুলির ওপর যদি F বল প্রয়োগ করে, তাহলে গুলিটিও বন্দুকের ওপর সমান ও বিপরীতমুখি বল প্রয়োগ করে। এই প্রতিক্রিয়া বলের জন্য বন্দুকটিও পেছন দিকে এগিয়ে যায় [চিত্র ৪.৯]।

চিত্র ৪.৯

ভরবেগ দিয়েও এর কারণ ব্যাখ্যা করা যায়। গুলি ছোড়ার আগে বন্দুক ও গুলি উভয়েই স্থির থাকে। অতএব বন্দুকের ভরবেগ শূন্য এবং গুলির ভরবেগ শূন্য। সুতরাং তাদের মোট আদি ভরবেগ শূন্য। গুলি ছোঁড়ার পর বারুদের বিস্ফোরণের ফলে গুলি একটি বেগে সামনের দিকে যায়। ফলে এটি সামনের দিকে একটি ভরবেগ প্রাপ্ত হয়। ভরবেগের নিত্যতা অনুসারে গুলি ছোঁড়ার পরেও তাদের মোট ভরবেগ শূন্য হবে। ফলে বন্দুককেও গুলির সমান ও বিপরীতমুখি একটি ভরবেগ লাভ করতে হবে। ফলে বন্দুককে অবশ্যই পেছনের দিকে গতিপ্রাপ্ত হতে হবে [চিত্র ৪.৮]। তাই বন্দুক পিছনের দিকে ধাক্কা দেয়।

মনে করি M ভরের একটি বন্দুক হতে m ভরের একটি গুলি $\vec{v}$ বেগে বের হয়ে গেল। আবার মনে করি গুলি ছোঁড়ার পর বন্দুকের পশ্চাৎ বেগ = $\vec{V}$।

$\therefore$ গুলি ছোঁড়ার আগে তাদের মোট ভরবেগ = 0

গুলি ছোঁড়ার পর তাদের মোট ভরবেগ = বন্দুকের ভরবেগ + গুলির ভরবেগ = $M\vec{V} + m\vec{v}$

কিন্তু ভরবেগের নিত্যতা সূত্র অনুসারে আগের ও পরের ভরবেগ সমান।

$$\therefore\ M\vec{V} + m\vec{v} = 0$$
$$\text{বা, } m\vec{v} = -M\vec{V} = M(-\vec{V})$$
$$\text{বা, } \vec{V} = \frac{-m\vec{v}}{M} \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (4.10)$$

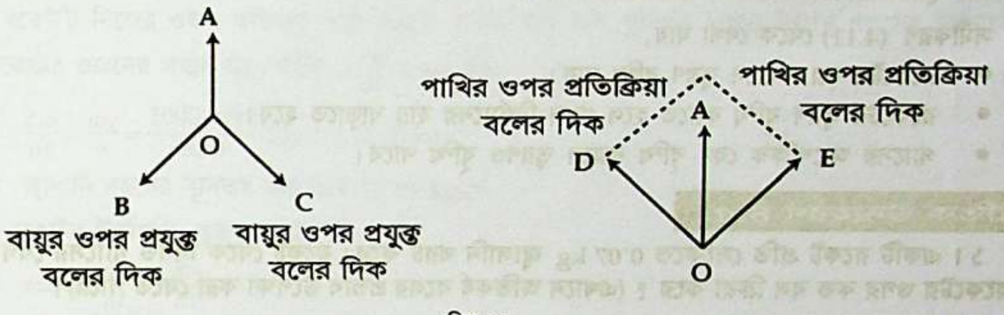
এই বেগে বন্দুককে পিছনের দিকে ধাক্কা দেয়।

সমীকরণ (4.10) অনুযায়ী গুলির ভর × গুলির বেগ = বন্দুকের ভর × বন্দুকের পশ্চাৎ বেগ।

এই সমীকরণ থেকে আরও বলা যায়, গুলির বেগ > বন্দুকের পশ্চাৎ বেগ।

৫। পাখির আকাশে উড়া :

একটি পাখি যখন OA বরাবর উড়ে যায় তখন পাখিটি তার ডানা দুটি দিয়ে বায়ুর ওপর OB এবং OC অভিমুখে বল প্রয়োগ করে। একই সঙ্গে বায়ুও OE এবং OD অভিমুখে পাখিটির ওপর প্রতিক্রিয়া বল প্রয়োগ করে [চিত্র ৪.১০]। এই প্রতিক্রিয়া বল দুটি পাখিটির ওপর ক্রিয়া করায় পাখির গতি সৃষ্টি করে। প্রতিক্রিয়া বল দুটির লব্ধি হলো OA, ফলে



চিত্র ৪.১০

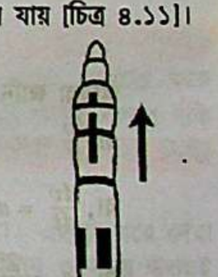
পাখিটি OA বরাবর উড়ে যেতে পারে। এখন পাখিটি যদি এক ডানা দিয়ে অন্যটির তুলনায় কম বল প্রয়োগ করে, তখন প্রতিক্রিয়া বলের লব্ধি OA বরাবর ক্রিয়া করে না। বরং যেদিকে ডানা দ্বারা কম বল প্রযুক্ত হয় সেদিকে হেলে যায়, ফলে পাখিটির চলার দিক পরিবর্তিত হয়। বায়ুশূন্য স্থানে ডানায় প্রতিক্রিয়া বল ক্রিয়াশীল হয় না, ফলে পাখি বায়ুশূন্য স্থানে উড়তে পারে না।

অনুধাবনমূলক কাজ : বায়ুশূন্য স্থানে পাখি উড়তে পারে না কেন ?

৬। মহাশূন্যে অভিযান তথা রকেটের গতি :

মহাশূন্যে অভিযানকালে যখন রকেট উপরের দিকে ধাবিত হয় তখন যদি তোমরা রকেটের দিকে তাকাও তাহলে এর পেছন দিয়ে সাদা মেঘের মতো ধোঁয়া নির্গত হতে দেখবে। কেন এমন ধোঁয়া দেখা যায় তার কারণ বলতে পারবে কী ? জ্বালানি দহনের ফলে অতি উচ্চ চাপে গ্যাস উৎপন্ন হয়। এই গ্যাসের কুণ্ডলী আমরা পৃথিবী থেকে অনেক সময় দেখতে পাই। এই গ্যাস রকেট-এর পেছনে একটি সরু নলের মধ্য দিয়ে তীব্র বেগে বেরিয়ে আসে। এর ফলে যে প্রচণ্ড বিপরীতমুখি প্রতিক্রিয়া বল সৃষ্টি হয়, সেই বলের ক্রিয়ায় রকেট তীব্র বেগে সামনের দিকে এগিয়ে যায় [চিত্র ৪.১১]।

কৃত্রিম উপগ্রহের বহুল ব্যবহার অত্যাধুনিক যোগাযোগ ব্যবস্থার উন্নয়নে এবং মহাকাশ গবেষণায় বিরাট অবদান রেখেছে। এর মূলে রয়েছে রকেট চালনার ক্রমাগত উন্নতি সাধন। ভরবেগের সংরক্ষণ নীতি অনুযায়ী রকেটও সমান কিন্তু বিপরীতমুখি ভরবেগ প্রাপ্ত হয় এবং উচ্চ বেগে ওপরে উঠে যায়। জ্বালানি হিসেবে রকেটে সাধারণত তরল হাইড্রোজেন এবং দহনের জন্য তরল অক্সিজেন থাকে। বিশেষ প্রক্রিয়ায় এবং নিয়ন্ত্রিত হারে তরল হাইড্রোজেন ও অক্সিজেনকে দহন প্রকোষ্ঠে প্রবেশ করানো হয়। জ্বালানির দহন ক্রিয়ার ফলে উৎপন্ন উচ্চ চাপের গ্যাস অত্যন্ত উচ্চ বেগে রকেটের নিচের দিকে নির্গমন পথ দিয়ে বেরিয়ে আসে এবং রকেট দ্রুত বেগে সামনের দিকে এগিয়ে চলে।



চিত্র ৪.১১

মনে করি, একটি রকেট মহাশূন্যে গতিশীল। ফলে বাতাসের বাধা এবং অভিকর্ষের প্রভাব উপেক্ষা করা যায়। যেহেতু রকেট থেকে গ্যাস নির্গমনের ফলে গ্যাসের গতির বিপরীত দিকে রকেটের ওপর একটি বল বা ধাক্কার সৃষ্টি হয়, ফলে রকেট দ্রুত গতিতে সামনের দিকে এগিয়ে যায়। ফলে রকেটের সাহায্যে মুক্তি বেগ ($11.2\ kms^{-1}$) অর্জন করে অভিকর্ষজ ত্বরণের বাধা কাটিয়ে মহাশূন্যে ভূ-উপগ্রহ স্থাপনসহ নানাবিধ অভিযান সফল হয়েছে।

ধরা যাক প্রযুক্ত ধাক্কা = F, রকেটের ভর = M, Δt সময়ে নির্গত গ্যাসের ভর = Δm, গ্যাসের নির্গত বেগ = v

Δt সময় ব্যবধানে গ্যাসের ভরবেগের পরিবর্তন = $(\Delta m)v$

ভরবেগের নিত্যতার সূত্র অনুযায়ী,

Δt সময়ে ভরবেগের পরিবর্তন = রকেটের ওপর প্রযুক্ত বলের ঘাত সমান

$$\therefore \quad (\Delta m)v = F \times \Delta t$$

$$F = \left(\frac{\Delta m}{\Delta t}\right) v,$$ এখানে $\frac{\Delta m}{\Delta t}$ = জ্বালানি ব্যবহারের হার

রকেটের তাৎক্ষণিক ত্বরণ a হলে, $F = Ma$

$$a = \frac{F}{M} = \frac{1}{M}\left(\frac{\Delta m}{\Delta t}\right) v \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (4.11)$$

এই ত্বরণে রকেট সামনের দিকে এগিয়ে চলে।

সমীকরণ (4.11) থেকে দেখা যায়,

- রকেটের ভর কমালে ত্বরণ বৃদ্ধি পায়।
- রকেটের ত্বরণ বৃদ্ধি করতে হলে গ্যাস নির্গমনের হার বাড়াতে হবে।
- গ্যাসের আপেক্ষিক বেগ বৃদ্ধি করলে ত্বরণও বৃদ্ধি পাবে।

গাণিতিক উদাহরণ ৪.৫

১। একটি রকেট প্রতি সেকেন্ডে 0·07 kg জ্বালানি খরচ করে। রকেট থেকে নির্গত গ্যাসের বেগ 100 kms^{-1} হলে রকেটের ওপর কত বল ক্রিয়া করে ? (এখানে অভিকর্ষ বলের প্রভাব উপেক্ষা করা যেতে পারে)।

দেয়া আছে,

প্রতি সেকেন্ডে জ্বালানি খরচ,

$$\frac{dm}{dt} = 0·07 \text{ kg s}^{-1}$$

এবং নির্গত গ্যাসের বেগ, $v_r = 100 \text{ kms}^{-1} = 1 \times 10^5 \text{ ms}^{-1}$

আমরা জানি, $F = v_r\, dm/dt - mg$

অভিকর্ষ বলের প্রভাব না থাকলে $(g = 0)$, রকেটের ওপর ক্রিয়াশীল বল,

$$F = v_r \frac{dm}{dt} = 1 \times 10^5 \text{ ms}^{-1} \times 0·07 \text{ kg} = 7 \times 10^3 \text{ N}$$

২। একটি রকেট ঊর্ধ্বমুখি যাত্রার প্রথম 2 সেকেন্ডে এর ভরের $\frac{1}{50}$ অংশ হারায়। রকেট হতে নিষ্ক্রান্ত গ্যাসের গতিবেগ 2500 ms^{-1} হলে রকেটের ত্বরণ বের কর।

প্রশ্নানুসারে, $dm = \frac{m}{50}$

$dt = 2 \text{ s}$

$v_r = 2500 \text{ ms}^{-1}$

আমরা জানি,

$$m\frac{dv}{dt} = v_r \frac{dm}{dt} - mg$$

বা, $\frac{dv}{dt} = a = \frac{v_r}{m}\left(\frac{dm}{dt}\right) - g$

বা, $a = \frac{2500 \text{ ms}^{-1}}{m} \cdot \frac{m}{50 \times 2 \text{ s}} - 9·8 \text{ ms}^{-2}$

$= 25 \text{ ms}^{-2} - 9·8 \text{ ms}^{-2} = 15·2 \text{ ms}^{-2}$

৩। একটি রকেটের প্রাথমিক ভর 4000 kg। রকেট থেকে 15 kgs^{-1} হারে গ্যাস নির্গত হচ্ছে। গ্যাসের আপেক্ষিক বেগ 8 kgs^{-1} হলে 2 মিনিট পরে রকেটটির ত্বরণ কত ?

আমরা জানি,

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{v_r}{M}\frac{dm}{dt}$$

$$\therefore \quad a = \frac{8 \times 10^3}{2200} \times 15$$

$$= 54·5 \text{ ms}^{-2}$$

এখানে,

প্রাথমিক ভর, $M_0 = 4000 \text{ kg}$

$\Delta M = \frac{dm}{dt} \times t = 15 \times 2 \times 60$

$= \frac{dm}{dt} = 15 \text{ kgs}^{-1}$

2 মিনিট পরে ভর,

$M = M_0 - \Delta M$

$= 4000 - 15 \times 2 \times 60$

$= 2200 \text{ kg}$

$v_r = 8 \text{ kms}^{-1} = 8 \times 10^3 \text{ ms}^{-1}$

৪। 1000 kg ভরের একটি রকেটকে উল্লম্বভাবে উৎক্ষেপণ করতে হবে। জ্বালানি দহনে উৎপন্ন গ্যাসের নির্গমন বেগ 800 ms^{-1}।

(i) কী হারে গ্যাস নির্গত হলে রকেটটি নিজের ওজনকে অতিক্রম করে ঠিক উড়তে সক্ষম হবে ?

(ii) কী হারে গ্যাস নির্গত হলে রকেটটি শুরুতে অভিকর্ষজ ত্বরণের দ্বিগুণ ত্বরণ পাবে ?

(i) রকেটটি নিজের ওজন অতিক্রম করে উড়তে সক্ষম হবে যদি জ্বালানি দহনে উৎপন্ন গ্যাসের নির্গমনের ফলে সৃষ্ট ঘাত রকেটের ওজনের সমান হয়; অর্থাৎ $u\frac{dm}{dt} = mg$ হয়।

$$\therefore \quad \frac{dm}{dt} = \frac{mg}{u} = \frac{1000 \times 9{\cdot}8}{800} \text{ kgs}^{-1} = 12{\cdot}25 \text{ kgs}^{-1}$$

$\therefore$ জ্বালানি দহনের ন্যূনতম হার হবে $12{\cdot}25$ kgs^{-1}

(ii) রকেটের ঊর্ধ্বমুখি ত্বরণ a হলে,

$$ma = m\frac{dv}{dt} = u\frac{dm}{dt} - mg$$

বা, $a = \frac{u}{m}\frac{dm}{dt} - g$

বা, $\frac{dm}{dt} = \frac{m}{u}(a + g)$

প্রশ্নানুসারে, $a = 2g$

$$\therefore \quad \frac{dm}{dt} = \frac{m}{u} \times (2g + g) = \frac{m}{u} \times 3g$$

$$= \frac{1000}{800} \times 3 \times 9{\cdot}8 \text{ kgs}^{-1} = 36{\cdot}75 \text{ kgs}^{-1}$$

$\therefore$ $36{\cdot}75$ kgs^{-1} হারে গ্যাস নির্গত হতে হবে।

৪.৫ নিউটনের গতিসূত্রের অবদান
Contribution of Newton's laws of motion

নিউটনের সূত্রাবলির ওপর ভিত্তি করে যে বলবিদ্যার সৃষ্টি এবং উন্নয়ন হয়েছে তাকে নিউটনীয় বলবিদ্যা (Newtonian mechanics) বা সনাতন বলবিদ্যা (Classical mechanics) বলা হয়। এই বলবিদ্যার সাহায্যে পৃথিবীর বিভিন্ন বস্তুর গতি, অসীম আকাশের তারকা এবং গ্রহের গতি বিশ্লেষণ করা যায়। নিউটনের গতিসূত্র ব্যবহার করে আমরা এই সমস্ত বস্তুর গতির নিখুঁত সমাধান পাই। নিউটনীয় বলবিদ্যা বা সনাতন বলবিদ্যা এই সমস্ত বস্তুর গতি বিশ্লেষণে অপূর্ব সাফল্য অর্জন করেছে। এই কারণে, বলা হয় যে, নিউটনীয় বলবিদ্যা আধুনিক পদার্থবিজ্ঞানের ভিত্তি স্থাপন করেছে।

নিউটনীয় বলবিদ্যায় ধরা হয়েছে যে বস্তুর ভর ও দৈর্ঘ্য বস্তুর বেগের ওপর নির্ভর করে না। এছাড়া ধরে নেয়া হয়েছে যে পরিমাপ্য যন্ত্রপাতির কার্যনীতি এগুলোর গতির দ্বারা প্রভাবিত হয় না। এই বলবিদ্যায় স্থান ও সময় উভয়ই অপরিবর্তনীয় ধরা হয়েছে এবং কোনো কিছুরই সাপেক্ষে আপেক্ষিক নয়। নিউটনের প্রথম গতিসূত্রে শুধুমাত্র জড়তা কোনো প্রসঙ্গের সাপেক্ষে সঠিকভাবে প্রকাশ করা যায়। এই কারণে, নিউটনীয় বলবিদ্যায় একটি নির্দিষ্ট পরম স্থিতি প্রসঙ্গ বিবেচনা করা হয়।

কিন্তু বিজ্ঞানী আইনস্টাইন বিশদ গবেষণার পর এই সিদ্ধান্তে উপনীত হন যে, এই মহাবিশ্বে পরম স্থিতি বলে কিছু নেই। সব কিছুই গতিশীল। কিন্তু একটি নির্দিষ্ট বস্তুর সাপেক্ষে অপর একটি বস্তু স্থির রয়েছে। তিনি আরও প্রমাণ করেন, যে কোনো প্রসঙ্গ কাঠামোতে প্রকাশ করা হোক না কেন তা অপরিবর্তনীয় থাকে। এটিই আইনস্টাইনের আপেক্ষিক তত্ত্বের মৌলিক ধারণা। সবক্ষেত্রেই প্রযোজ্য হওয়ার জন্য বিজ্ঞানী আইনস্টাইন নিউটনীয় গতির অনেক সমীকরণ পরিবর্তন করেছেন। তিনি এ সমস্ত পরিবর্তনগুলি বিভিন্ন পরীক্ষণ দ্বারা প্রমাণ করেন। এগুলোর মধ্যে একটি হলো যে, বস্তুর ভর দ্রুতির ওপর নির্ভর করে। সুতরাং বলের প্রয়োগে বস্তুতে যে ত্বরণ সৃষ্টি হয় তা ধ্রুব থাকে না অর্থাৎ ত্বরণ এর দ্রুতির ওপর নির্ভর করে। এছাড়া, একটি বস্তুর দৈর্ঘ্য এবং সময় অবকাশও গতির উপর নির্ভর করে। বিভিন্ন পরিমাপের পরীক্ষালব্ধ ফলাফলও গতির ওপর নির্ভরশীল। আইনস্টাইনের আপেক্ষিক তত্ত্ব পদার্থবিজ্ঞানের অনেক নতুন ধারণার সৃষ্টি করেছে এবং সনাতন অনেক ধারণার পরিবর্তন ঘটিয়েছে। বস্তুর গতিবেগ যখন আলোর বেগের কাছাকাছি পৌঁছায় তখন নিউটনীয় বলবিদ্যা আর কার্যকর থাকে না। এ ধরনের উচ্চ গতিবেগ অথবা গতি বর্ণনায় আপেক্ষিক বলবিদ্যার প্রয়োজন হয়।

অণু-পরমাণুর গতি বিশ্লেষণে নিউটনীয় বলবিদ্যা কার্যকর নয়, এ ধরনের ক্ষুদ্র কণার গতি বিশ্লেষণে (যেমন অণু, পরমাণু, ইলেকট্রন, প্রোটন ইত্যাদি) কোয়ান্টাম বলবিদ্যার প্রয়োজন হয়। এর অর্থ এই নয় যে সনাতন বলবিদ্যা সেকেলে হয়ে গেছে।

বাস্তবিক পক্ষে, নিউটনের প্রথম সূত্র প্রসঙ্গ কাঠামোর সঙ্গে সম্পর্কিত। কেননা কোনো প্রসঙ্গ কাঠামোর সাপেক্ষে একটি বস্তুর পরিমাপ্য ত্বরণ ওই প্রসঙ্গের ওপর নির্ভর করে। প্রথম সূত্র বলে যে, যদি কাছাকাছি কোনো বস্তু না পাওয়া যায়, তবে একগুচ্ছ প্রসঙ্গ কাঠামো পাওয়া যেতে পারে। সেখানে কণাটির কোনো ত্বরণ থাকে না। প্রযুক্ত বলের অবর্তমানে বস্তু স্থিতি অবস্থায় অথবা সমরৈখিক গতিতে থাকে—এই গুণ জড়তা ভিন্ন অন্য কিছু নয়।

নিউটনের দ্বিতীয় সূত্রে আমরা জেনেছি যে একটি বস্তুর ত্বরণ এর ওপর প্রযুক্ত বলের সমানুপাতিক। এখন আমাদের প্রশ্ন, একই বল অন্য বস্তুতে ভিন্নতর হবে কি-না; অবশিষ্ট গুরুত্বপূর্ণ প্রশ্ন হলো, বিভিন্ন বস্তুতে ক্রিয়াশীল একই বল ভিন্নতর হবে কি-না ? অর্থাৎ, একই মানের বল বিভিন্ন বস্তুতে কী ধরনের ক্রিয়া করে এই সূত্র থেকে এর আঙ্গিক উত্তর পেতে পারি। নিউটনের তৃতীয় সূত্র থেকে আমরা শিখতে পারি যে, একক বল হলো শুধু ত্রুটিমুক্ত দুটি বস্তুর মধ্যে মিথস্ক্রিয়ার অভিমুখ। এছাড়া, এই দুটি বলের মান সমান কিন্তু বিপরীতমুখি। সুতরাং, কোনো অন্তরীত বা বিচ্ছিন্ন বলের অস্তিত্ব নেই এবং এটি পাওয়া অসম্ভব। পদার্থবিজ্ঞান কতকগুলো অনমনীয় তত্ত্বের সংমিশ্রণ নয়, বরং এটি অনবরত উন্নয়নশীল বিজ্ঞান। লক্ষণীয় যে 1660 সালে পদার্থবিজ্ঞান নিউটনীয় বলবিদ্যার দ্বারা, 1870 সালে ম্যাক্সওয়েলের তড়িৎ চুম্বকীয় তত্ত্ব, 1906 সালে আইনস্টাইনের আপেক্ষিক তত্ত্ব এবং 1925 সালে কোয়ান্টাম বলবিদ্যার সাহায্যে পূর্ণতা পেতে থাকে।

বিগত কয়েক দশকে কোয়ান্টাম বলবিদ্যার সাহায্যে ক্ষুদ্র কণা যেমন ইলেকট্রন, প্রোটন এবং অন্যান্য মৌলিক কণাসমূহের গুণাগুণ পরিমাপ করা সম্ভব হয়েছে। নিউটনীয় বলবিদ্যা এ সমস্ত দ্রুতগতির কণার গতি বর্ণনা করতে পারেনি। নিউটনীয় বলবিদ্যা $\frac{v}{c} \ll 1$ সীমায় কঠিন বিষয়গুলো ব্যাখ্যা করতে খুবই উপযোগী; কিন্তু উচ্চ দ্রুতির মৌলিক কণাগুলোর সংঘর্ষ, ক্ষয় এবং মিথস্ক্রিয়া ব্যাখ্যা করতে পারে না। তথাপি নিউটনীয় বলবিদ্যার গুরুত্ব কোনোভাবেই কম নয়। নিউটনীয় বলবিদ্যাকে সাধারণ বলবিদ্যা কণাসমূহের আলোর বেগের কাছাকাছি বর্ণনা করে তার একটি বিশেষ রূপ হিসেবে ধরা যেতে পারে। দৈনন্দিন জীবনে আমরা যে সমস্ত বস্তু বিবেচনা করি তার ভর ইলেকট্রনের ভরের তুলনায় অনেক বেশি (ইলেকট্রনের ভর, $m = 9{\cdot}1 \times 10^{-31}$ kg)। এটি আকর্ষণীয় বিষয় যে খুবই কাছাকাছি কণাসমূহের ধারণাই হলো সনাতন বলবিদ্যার ভিত্তি।

এই বলবিদ্যা বা নিউটনের গতির সমীকরণসমূহ দ্বারা কণার অবস্থান এবং তাদের বেগ একই সঙ্গে সূক্ষ্মভাবে পরিমাপ করা সম্ভব নয়, অনিশ্চয়তা থাকে। এই নিশ্চয়তা **হাইজেনবার্গের অনিশ্চয়তা নীতি** হিসেবে পরিচিত যা নিম্নোক্তভাবে প্রকাশ করা যায়,

$\Delta x \cong \frac{h}{m\Delta v_x}$, এখানে h = প্ল্যাঙ্ক ধ্রুবক।

নিউটনীয় বলবিদ্যা সাধারণ আপেক্ষিকতার একটি বিশেষ রূপ যা ক্ষুদ্র কণার গতি-প্রকৃতি ব্যাখ্যা করতে সাহায্য করে। হাইজেনবার্গ, স্রোডিঞ্জার, বার্ন 1925–1926 সনে এবং ডিরাক 1927 সনে এবং অন্য বিজ্ঞানীরা তা ব্যাখ্যা করতে সমর্থ হন।

৪.৬ নিউটনের গতিসূত্রের সীমাবদ্ধতা
Limitations of Newton's laws of motion

নিউটনের গতিসূত্র বৃহৎ আকৃতির বস্তুর জন্য প্রযোজ্য। যে সকল কণার ভর খুবই কম যেমন ইলেকট্রন, প্রোটন, নিউট্রন ইত্যাদির ক্ষেত্রে নিউটনের গতিসূত্র প্রযোজ্য নয়।

ক্ষুদ্র ভর (10^{-31} kg) বিশিষ্ট সকল কণার বেগ বেশি হয়, অর্থাৎ প্রায় আলোর বেগের কাছাকাছি হয় ফলে গতিশীল অবস্থায় এরা তরঙ্গ রূপে আচরণ করে। এ সকল বস্তুর ক্ষেত্রে নিউটনের গতিসূত্র প্রযোজ্য নয়। এসব ক্ষেত্রে আপেক্ষিকতা তত্ত্ব প্রযোজ্য।

আবার বস্তুর ত্বরণ যখন খুব কম ($< 10^{-10}$ ms^{-2}) হয় তখন নিউটনের গতিসূত্র প্রয়োগে ভালো ফল পাওয়া যায় না। এক্ষেত্রে বল ত্বরণের বর্গের সমানুপাতিক হয়। নিউটনের গতিসূত্র কেবলমাত্র বল ত্বরণের সমানুপাতিক ক্ষেত্রে প্রযোজ্য।

কোনো বস্তু স্থির কাঠামোতে বা সমবেগে চলমান হলে নিউটনের গতিসূত্র প্রযোজ্য হয়। অন্যথায় প্রযোজ্য হবে না।

নিউটনের গতির সূত্র প্রয়োগ করা যায় যখন বস্তুর বেগ আলোর বেগের তুলনায় অনেক কম থাকে। আলোর বেগের কাছাকাছি বেগসম্পন্ন বস্তুর গতির ক্ষেত্রে নিউটনের সূত্র প্রয়োগ করা যায় না। এক্ষেত্রে আইনস্টাইনের আপেক্ষিকতার সূত্র ব্যবহার করা হয়।

অনুসন্ধানমূলক কাজ : 4 kg ভরের একটি বস্তুকে একটি স্প্রিং তুলা যন্ত্র থেকে ঝুলিয়ে দেওয়া হলো এবং একই ভরের অপর একটি বস্তুকে একটি সাধারণ তুলা যন্ত্রের সাহায্যে প্রতিমিত (balanced) করা হলো। তুলা যন্ত্র দুটিকে একটি লিফ্‌টের ভেতর রাখা হলো। এখন লিফ্‌টটি ত্বরণসহ ওপরে উঠতে থাকলে তুলা দুটির পাঠের কোনো পরিবর্তন হবে কী? ব্যাখ্যা কর।

তুলা দুটির পাঠের পরিবর্তন হবে।

ব্যাখ্যা : আমরা জানি, স্প্রিং তুলা যন্ত্র বস্তুর ওজন পরিমাপ করে। এখন, যেহেতু লিফ্‌টটি ত্বরণসহ ওপরে উঠছে তাই বস্তুর ওজন বৃদ্ধি পাবে। ফলে স্প্রিং তুলার পাঠ বৃদ্ধি পাবে। পক্ষান্তরে, সাধারণ তুলা যন্ত্রের সাহায্যে বস্তুর ভর পরিমাপ করা হয়। যেহেতু ভরের কোনো পরিবর্তন হয় না তাই সাধারণ তুলা যন্ত্রের পাঠের কোনো পরিবর্তন ঘটবে না।

৪.৭ বল, ক্ষেত্র ও ক্ষেত্র প্রাবল্যের ধারণা
Concept of force, field and field intensity

পূর্বের অনুচ্ছেদে বল কী এবং এর প্রকারভেদ সম্পর্কে ধারণা প্রদান করা হয়েছে। আমরা জেনেছি, **'যে বাহ্যিক কারণ বস্তুর গতি বা স্থিতি অবস্থার পরিবর্তন ঘটায় বা ঘটাতে চায় তাকে বল বলে।'** বল একটি ভেক্টর রাশি।

বলের প্রকৃতি (Nature of Force) :

মহাকর্ষ বল দুটি বস্তুর মধ্যকার আকর্ষণ বল। দুটি চার্জিত বস্তু পরস্পরকে আকর্ষণ করে যখন চার্জ দুটি বিপরীতধর্মী হয় অর্থাৎ একটি ধনাত্মক বা অপরটি ঋণাত্মক হয় এবং বিকর্ষণ করে যখন চার্জ দুটি সমধর্মী হয়। মহাকর্ষ বল মাধ্যমের ওপর নির্ভর করে না। কিন্তু তড়িৎ বল মাধ্যমের উপর নির্ভরশীল।

ক্ষেত্র (Field) :

একটি চার্জের চারদিকে বিস্তৃত অঞ্চল জুড়ে এর প্রভাব লক্ষ করা যায়। ওই অঞ্চলে অন্য একটি চার্জ আনলে, সেটি বল অনুভব করে। আবার দ্বিতীয় চার্জ প্রথম চার্জের উপর বল প্রয়োগ করে। অর্থাৎ চার্জ দুটির মধ্যে ক্রিয়াশীল বল পারস্পরিক। এখন চার্জের মান বাড়লে বল বাড়বে। আবার চার্জ দুটির মধ্যে দূরত্ব বাড়লে বলের মান কমে যায়।

অনুরূপভাবে, একটি বস্তুর চারদিকের অঞ্চল জুড়ে এর প্রভাব লক্ষ করা যায়। ওই অঞ্চলে অপর একটি বস্তু থাকলে সেটি বল অনুভব করে। এই বল মহাকর্ষীয় বল। এই বল পারস্পরিক; অর্থাৎ একে অপরের ওপর ক্রিয়াশীল হয়। এখন বস্তুর ভর বৃদ্ধি পেলে বলের মান বাড়ে। আবার বস্তুদ্বয়ের মধ্যে দূরত্ব বাড়লে বলের মান কমে।

উপরোক্ত আলোচনা থেকে দেখা যায় যে, দুটি বস্তুর মধ্যে কিংবা দুটি চার্জের মধ্যে ক্রিয়াশীল বল সংস্পর্শ ছাড়াই দূর থেকে ক্রিয়া করে। কিন্তু প্রশ্ন জাগে যে চার্জ দুটির মধ্যে কোনো ভৌত সংযোগ ছাড়াই কীভাবে বল ক্রিয়া করে। বিখ্যাত বিজ্ঞানী মাইকেল ফ্যারাডে প্রথম অনুধাবন করেন যে, চার্জের চারদিকে এক ধরনের আলোড়ন সৃষ্টি হয় যার ফলে ওই অঞ্চলে কোনো চার্জ স্থাপন করলে সেটি বল অনুভব করে। তিনি এই আলোড়নের নাম দেন তড়িৎ ক্ষেত্র। সুতরাং তড়িৎ ক্ষেত্রের নিম্নোক্ত সংজ্ঞা দেয়া যায় :

সংজ্ঞা : কোনো একটি চার্জ চারদিকে যে অঞ্চল জুড়ে তার প্রভাব বিস্তার করে সেই অঞ্চলকে ওই চার্জের তড়িৎ ক্ষেত্র বলে।

অনুরূপ, মহাকর্ষ বিষয়ক আলোচনায় ক্ষেত্রের ধারণা প্রয়োগ করা হয়। এ ধারণা অনুযায়ী, **"কোনো বস্তুর চারদিকে যে স্থান জুড়ে তার আকর্ষণ বল অনুভূত হয়, সে স্থানকে ওই বস্তুর মহাকর্ষীয় ক্ষেত্র বলে।"** অতএব, মহাকর্ষীয় ক্ষেত্র মহাকর্ষীয় বল সঞ্চালনের মধ্যস্থতাকারী হিসেবে ক্রিয়া করে।

ক্ষেত্র প্রাবল্য (Field Intensity) :

তড়িৎ ক্ষেত্র বা মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রের সর্বত্র এর প্রভাব সমান নয়। চার্জিত বা আহিত বস্তুর কাছাকাছি তড়িৎ ক্ষেত্রের কোনো বিন্দুতে একটি চার্জ যতটুকু বল অনুভব করে দূরে তার চেয়ে কম বল অনুভব করবে। আবার চার্জিত বস্তুর চার্জের পরিমাণ বেশি হলে ওই একই বিন্দুতে কম চার্জের বস্তু অপেক্ষা বেশি বল অনুভূত হবে। তড়িৎ ক্ষেত্রের এই দুর্বলতা বা সবলতা একটি তড়িৎ রাশি দ্বারা প্রকাশ করা হয়। একে তড়িৎ ক্ষেত্রের প্রাবল্য বা তড়িৎ প্রাবল্য বলে।

সংজ্ঞা : তড়িৎ ক্ষেত্রের কোনো বিন্দুতে একক আধান বা চার্জের উপর ক্রিয়াশীল বলকে তড়িৎ ক্ষেত্রের প্রাবল্য বা তড়িৎ প্রাবল্য বলে।

এখন তড়িৎ বল $\vec{F}$ হলে এবং চার্জ q_0 হলে সংজ্ঞানুসারে তড়িৎ প্রাবল্য,

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} \text{ বা, } \vec{F} = q_0\vec{E}$$

এটি ভেক্টর রাশি। এর একক হলো NC^{-1}।

অনুরূপ, মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রের সকল বিন্দুতে একই বল ক্রিয়াশীল নয়। অর্থাৎ মহাকর্ষীয় প্রাবল্য ভিন্নতর হয়। মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রের কোনো বিন্দুতে প্রাবল্য বা তীব্রতা নির্ণয় করতে ওই বিন্দুতে একক ভরের একটি বস্তু বিবেচনা করা হয়। একক ভরের বস্তুটি যে বল লাভ করে তা দিয়েই মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রের প্রাবল্য পরিমাপ করা হয়।

সংজ্ঞা : মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রের কোনো বিন্দুতে একক ভরের একটি বস্তু স্থাপন করলে তার ওপর যে বল প্রযুক্ত হয়, তাকে ওই ক্ষেত্রের দরুন ওই বিন্দুতে মহাকর্ষীয় প্রাবল্য বলে।

অতএব, মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রের কোনো বিন্দুতে m ভরের বস্তুর উপর $\vec{F}$ বল ক্রিয়া করলে ওই বিন্দুতে মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রের প্রাবল্য হবে,

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{m} \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (4.12)$$

প্রাবল্যের মান ও দিক দুই-ই আছে। প্রাবল্যের অভিমুখই মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রের অভিমুখ নির্দেশ করে। এর একক হলো Nkg^{-1}।

৪.৮ রৈখিক ভরবেগের নিত্যতা
Conservation of linear momentum

রৈখিক ভরবেগের নিত্যতার নীতি পদার্থবিজ্ঞানের অন্যতম গুরুত্বপূর্ণ বিষয়। নিউটনের গতিসূত্র থেকে এই নীতি পাওয়া যায়। কতগুলি বস্তু পরস্পরের ওপর বল (ক্রিয়া-প্রতিক্রিয়া) প্রয়োগ করতে পারে এবং তার প্রভাবে সচল হতে পারে, কিন্তু বাইরে থেকে কোনো বল প্রয়োগ না করলে তাদের মোট ভরবেগ সবসময় অপরিবর্তিত থাকে। তোমরা লক্ষ করে থাকবে চেয়ারে বসে থাকা অবস্থায় কোনো লোক চেয়ারের ওপর বল প্রয়োগ করে চেয়ারটি তুলতে পারে না। এর কারণ কী ব্যাখ্যা করতে পারবে ? চেয়ার ও লোকটি স্থির বলে এদের মোট ভরবেগ শূন্য। এখন লোকটি চেয়ারকে তুলতে চেষ্টা করলে অর্থাৎ চেয়ারের উপর উপরের দিকে বল প্রয়োগ করলে চেয়ারটি লোকটির ওপর নিচের দিকে সমান প্রতিক্রিয়া বল প্রয়োগ করবে। কিন্তু এই বল দুটিই হলো চেয়ার ও লোকটির মধ্যে ক্রিয়াকৃত বল, যেহেতু বাইরে থেকে কোনো বল প্রয়োগ হচ্ছে না। তাই চেয়ার ও লোকটির মোট ভরবেগ শূন্যই থাকবে। ফলে চেয়ার ওপরে উঠবে না। একইভাবে চেয়ারে বসে থাকা কোনো ব্যক্তি হাত দিয়ে ওপরের দিকে চুল টেনে নিজেকে ওপরের দিকে তুলতে পারবে না। আবার গাড়ি বন্ধ হয়ে গেলে যাত্রীরা যদি গাড়ির মধ্যে থেকে গাড়িকে ঠেলতে থাকে তাহলেও গাড়ি চলবে না। এই সকল প্রশ্নের উত্তর রৈখিক ভরবেগের নিত্যতার সূত্র বা সংরক্ষণ নীতি থেকে পাওয়া যায়।

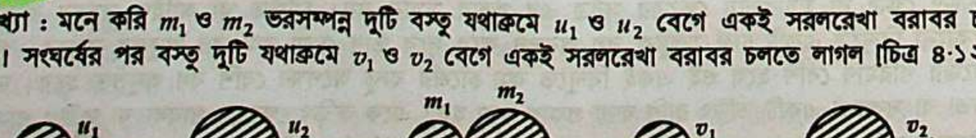
নিউটনের গতির তৃতীয় সূত্র থেকে আমরা ভরবেগের নিত্যতার সূত্র সম্পর্কে জানতে পারি। ভরবেগের নিত্যতার সূত্র ছোট-বড় পার্থিব বা মহাজাগতিক সব বস্তুর ক্ষেত্রে সমভাবে প্রযোজ্য। নিউটনের গতির প্রথম সূত্র থেকে আমরা জানি কোনো বস্তুর ওপর প্রযুক্ত নিট বল যদি শূন্য হয়, তাহলে চলমান একটি বস্তু সরল পথে সমদ্রুতিতে চলতে থাকে অর্থাৎ এর বেগ ধ্রুব থাকে। সময়ের সাপেক্ষে বেগ $\vec{v}$ ধ্রুব থাকলে ভরবেগ $\vec{p} = m\vec{v}$ ও সময়ের সাপেক্ষে ধ্রুব থাকে।

৪.৯ ভরবেগের সংরক্ষণ নীতি বা নিত্যতার সূত্র
Conservation principle of momentum

নিউটনের গতির দ্বিতীয় সূত্র থেকে আমরা জানি যে, কোনো বস্তুর ভরবেগের পরিবর্তনের হার বস্তুটির ওপর প্রযুক্ত বলের সমানুপাতিক। সুতরাং বস্তুটির ওপর কোনো বাহ্যিক বল প্রযুক্ত না হলে ভরবেগের কোনো পরিবর্তন হবে না। অর্থাৎ ওই বস্তুর রৈখিক ভরবেগ অপরিবর্তিত থাকে। এটিই হলো **রৈখিক ভরবেগের সংরক্ষণ নীতি বা নিত্যতার সূত্র।**

সূত্র : কোনো বস্তুর ওপর বাহ্যিক বল প্রযুক্ত না হলে ভরবেগের কোনো পরিবর্তন হবে না। অর্থাৎ ভরবেগ সংরক্ষিত থাকে।

ব্যাখ্যা : মনে করি m_1 ও m_2 ভরসম্পন্ন দুটি বস্তু যথাক্রমে u_1 ও u_2 বেগে একই সরলরেখা বরাবর চলার সময় সংঘর্ষ ঘটল। সংঘর্ষের পর বস্তু দুটি যথাক্রমে v_1 ও v_2 বেগে একই সরলরেখা বরাবর চলতে লাগল [চিত্র ৪.১২]।



চিত্র ৪.১২

সুতরাং সংঘর্ষের পূর্বে বস্তু দুটির মোট ভরবেগ $= m_1u_1 + m_2u_2$

এবং সংঘর্ষের পরে এদের মোট ভরবেগ $= m_1v_1 + m_2v_2$

এখন বাহ্যিক কোনো বল প্রযুক্ত না হলে ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্রানুসারে,

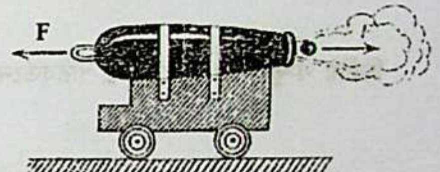
$$m_1u_1 + m_2u_2 = m_1v_1 + m_2v_2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (4.13)$$

অতএব, মোট রৈখিক ভরবেগ সংরক্ষিত বা অপরিবর্তিত থাকে।

৪.৯.১ রৈখিক ভরবেগের সংরক্ষণ নীতি বা ভরবেগের নিত্যতার সূত্রের উদাহরণ

কীভাবে রৈখিক ভরবেগের নিত্যতার সূত্র কার্যকর হচ্ছে নিচের উদাহরণগুলো থেকে তা ব্যাখ্যা করতে পারবে।

উদাহরণ ১। কামান থেকে গোলা ছুড়লে গোলাটি প্রচণ্ড বেগে সামনে ছুটে যায়। গুলি ছোড়ার পূর্বে কামান ও গুলি স্থির ছিল, ফলে ভরবেগ শূন্য ছিল। কিন্তু গুলি ছোড়ার পর গোলাটি একটি ভরবেগ প্রাপ্ত হয়। কামানটি গোলার ভরবেগের সমান কিন্তু বিপরীতমুখি একটি ভরবেগ লাভ করে। এই কারণেই কামানটি পেছন দিকে গতিপ্রাপ্ত হয় অর্থাৎ পিছু হটে [চিত্র ৪.১৩]।



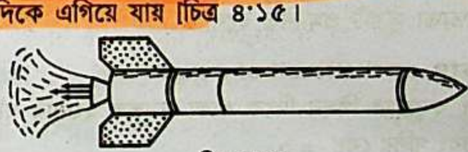
চিত্র ৪.১৩

চিত্র ৪.১৪

উদাহরণ ২। আরোহী নৌকা থেকে লাফিয়ে নামলে নৌকাটি পিছিয়ে যায়। লাফ দেবার আগে নৌকা ও আরোহী স্থির ছিল বলে ওদের মোট ভরবেগ শূন্য ছিল। সামনে লাফ দেওয়ায় আরোহী সচল হয়ে ভরবেগ লাভ করে। ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্র অনুযায়ী মোট ভরবেগ শূন্য থাকে। তাই নৌকাটিতে সমান ও বিপরীতমুখি ভরবেগ সৃষ্টি হয়। ফলে নৌকাটি সচল হয়ে পিছিয়ে যায় [চিত্র ৪.১৪]।

নিজে কর : নৌকা থেকে লাফ দেওয়ার সময় নৌকার পেছনে সরে যাবার কারণ ব্যাখ্যা কর।

উদাহরণ ৩। জ্বালানি দহনের ফলে উৎপন্ন গ্যাস তীব্র বেগে পেছনের দিকে বেরিয়ে যায় বলে রকেট বা জেট প্লেন সমান ভরবেগ নিয়ে সামনের দিকে এগিয়ে যায় [চিত্র ৪.১৫]।



চিত্র ৪.১৫

৪.১০ ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্রের সত্যতা যাচাই
Verification of conservation law of momentum

গাণিতিক পদ্ধতি :

গাণিতিকভাবে ভরবেগের নিত্যতা বা সংরক্ষণশীলতা যাচাই করা যায়।

মনে করি কোনো একটি সরল রেখায় m_1 এবং m_2 ভরের দুটি বস্তুকণা যথাক্রমে $\vec{u_1}$ ও $\vec{u_2}$ বেগে একই দিকে চলছে [চিত্র ৪.১৬]। এখানে $\vec{u_1} > \vec{u_2}$। কোনো এক সময়ে প্রথম বস্তুকণাটি পেছনের দিক হতে দ্বিতীয় বস্তুকণাটিকে ধাক্কা দিল এবং এর পর বস্তুকণা দুটি একই সরলরেখায় ও একই দিকে যথাক্রমে $\vec{v_1}$ ও $\vec{v_2}$ বেগে চলতে লাগল।

চিত্র ৪.১৬

মনে করি ধাক্কাজনিত ক্রিয়া ও প্রতিক্রিয়ার কার্যকাল t। তা হলে

বস্তুকণা দুটির আদি ভরবেগের সমষ্টি $= m_1\vec{u_1} + m_2\vec{u_2}$

বস্তুকণা দুটির শেষ ভরবেগের সমষ্টি $= m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2}$

ভরবেগের নিত্যতা সূত্রানুসারে প্রমাণ করতে হবে যে, $m_1\vec{u_1} + m_2\vec{u_2} = m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2}$

প্রমাণ :

প্রথম বস্তুকণার ভরবেগের পরিবর্তনের হার $= \dfrac{m_1\vec{v_1} - m_1\vec{u_1}}{t}$

$= $ প্রতিক্রিয়া বল $= \vec{F_1}$

$= $ প্রথম বস্তুকণার ওপর দ্বিতীয় বস্তুকণার প্রতিক্রিয়া বল।

দ্বিতীয় বস্তুকণার ভরবেগের পরিবর্তনের হার $= \dfrac{m_2\vec{v_2} - m_2\vec{u_2}}{t}$

$= $ ক্রিয়া বল $= \vec{F_2}$

$= $ দ্বিতীয় বস্তুকণার ওপর প্রথম বস্তুকণার প্রযুক্ত বল।

কিন্তু বস্তুকণা দুটির ভরবেগের পরিবর্তনের হার (অর্থাৎ ক্রিয়া বল ও প্রতিক্রিয়া বল) সমান ও বিপরীত। অর্থাৎ

$$\vec{F_2} = -\vec{F_1}$$

$$\therefore \frac{m_2\vec{v_2} - m_2\vec{u_2}}{t} = -\frac{m_1\vec{v_1} - m_1\vec{u_1}}{t}$$

বা, $m_2\vec{v_2} - m_2\vec{u_2} = -m_1\vec{v_1} + m_1\vec{u_1}$

বা, $m_1\vec{u_1} + m_2\vec{u_2} = m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2}$ .... = একটি ধ্রুব ভেক্টর

$\therefore$ বস্তুকণা দুটির আদি ভরবেগের সমষ্টি = বস্তুকণা দুটির শেষ ভরবেগের সমষ্টি।

অর্থাৎ $\sum m\vec{v} =$ ধ্রুব ভেক্টর। ... ... (4.14)

সুতরাং দুটি বস্তুর মধ্যে ক্রিয়া ও প্রতিক্রিয়াজনিত বলের ফলে মোট ভরবেগের কোনো পরিবর্তন হয় না, একটি বস্তু যে পরিমাণ ভরবেগ হারায়, অপরটি ঠিক সমপরিমাণ ভরবেগ লাভ করে অর্থাৎ ধাক্কার আগে ও পরে মোট ভরবেগ একই থাকে। অতএব ভরবেগের নিত্যতা সূত্রটি প্রমাণিত হলো।

বন্দুকের প্রতিক্ষেপ বা পশ্চাৎ বেগ (Recoil of a gun)

বন্দুক থেকে গুলি ছোড়া এবং বন্দুকের পিছন দিকে ধাক্কা অনুভূত হওয়ার ঘটনাই বন্দুকের প্রতিক্ষেপ।

ধরা যাক, গুলির ভর $= m_1$ এবং গুলির বেগ $= v_1$

এবং বন্দুকের ভর $= m_2$ এবং গুলির বেগ $= v_2$

গুলি ছোড়ার আগে এদের মোট ভরবেগ $= 0$ এবং গুলি ছোড়ার পর এদের মোট ভরবেগ $= m_1v_1 + m_2v_2$

ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্র থেকে পাই,

$$0 = m_1v_1 + m_2v_2$$

বা, $v_2 = -\dfrac{m_1}{m_2}v_1$ ... ... (i)

এই v_2 হলো বন্দুকের প্রতিক্ষেপ বা পশ্চাৎ বেগ (Recoil velocity)। সমীকরণ (i)-এর ডান পক্ষের ঋণাত্মক চিহ্ন দ্বারা বোঝা যায় যে v_1 ও v_2 পরস্পর বিপরীতমুখি। অর্থাৎ গুলি যে দিকে বেরিয়ে যায় বন্দুক তার বিপরীত দিকে গতিপ্রাপ্ত হয়।

ক্যালকুলাসের সাহায্যে রৈখিক ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্রের যাচাই

Verification of principle of conservation of linear momentum using calculus

ধরা যাক, m_1 ভরের একটি বস্তুর রৈখিক ভরবেগ $\vec{P_1}$ এবং m_2 ভরের অন্য একটি বস্তুর রৈখিক ভরবেগ $\vec{P_2}$। সংঘর্ষকালে m_1 বস্তুটি m_2 বস্তুর ওপর $\vec{F}_{21}$ বল এবং m_2 বস্তুটি m_1 বস্তুর ওপর $\vec{F}_{12}$ বল প্রয়োগ করে।

এখন, নিউটনের তৃতীয় গতিসূত্র অনুসারে,

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (i)$$

আবার, নিউটনের দ্বিতীয় গতিসূত্র অনুসারে, $\vec{F}_{12} = m_1$ বস্তুর ভরবেগের পরিবর্তনের হার $= \dfrac{d\vec{P_1}}{dt}$

এবং $\vec{F}_{21} = m_2$ বস্তুর ভরবেগের পরিবর্তনের হার $= \dfrac{d\vec{P_2}}{dt}$

সমীকরণ (i) হতে পাই,

$$\therefore \quad \frac{d\vec{P}_2}{dt} = -\frac{d\vec{P}_1}{dt}$$

$$\text{বা,} \quad \frac{d\vec{P}_2}{dt} + \frac{d\vec{P}_1}{dt} = 0$$

$$\text{বা,} \quad \frac{d}{dt}(\vec{P}_2 + \vec{P}_1) = 0$$

$$\text{বা,} \quad \vec{P}_2 + \vec{P}_1 = \text{ধ্রুবক} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(ii)}$$

এটিই রৈখিক ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্র।

রৈখিক ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্র থেকে নিউটনের তৃতীয় গতিসূত্র

Newton's third law of motion from the principle of conservation of linear momentum

চিত্র ৪.১১–এ বর্ণিত m_1 ও m_2 ভরের বস্তুদ্বয়ের সংঘর্ষের ক্ষেত্রে রৈখিক ভরবেগ সংরক্ষণ সূত্রানুযায়ী লেখা যায়,

$$m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$$

বা, $m_2\vec{v}_2 - m_2\vec{u}_2 = (m_1\vec{v}_1 - m_1\vec{u}_1)$ উভয়পক্ষে t দ্বারা ভাগ করে পাই

$$\text{বা,} \quad \frac{m_2\vec{v}_2 - m_2\vec{u}_2}{t} = -\frac{m_1\vec{v}_1 - m_1\vec{u}_1}{t}$$

বা, m_2 বস্তুর ভরবেগের পরিবর্তনের হার $= -$ (m_1 বস্তুর ভরবেগের পরিবর্তনের হার)

বা, m_1 বস্তু কর্তৃক m_2 বস্তুর ওপর প্রযুক্ত বল $= -$ (m_2 বস্তু কর্তৃক m_1 বস্তুর ওপর প্রযুক্ত বল)

$\therefore \quad \vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} \quad \therefore$ ক্রিয়া $= -$ প্রতিক্রিয়া।

সুতরাং, ক্রিয়া এবং প্রতিক্রিয়া পরস্পরের সমান ও বিপরীতমুখি। **এটিই নিউটনের তৃতীয় গতিসূত্র।**

অনুসন্ধানমূলক কাজ : জানালার কাচে ঢিল মারলে কাচটি টুকরো টুকরো হয়ে ভেঙ্গে যায়; কিন্তু বন্দুকের গুলি দিয়ে ওই অংশে আঘাত করলে একটি ছোট গর্ত হয় কেন ? ব্যাখ্যা কর।

একটি গুলির গতিবেগ ঢিলের গতিবেগ অপেক্ষা অনেক বেশি। ঢিলটির গতিবেগ কম হওয়ায় ঢিলের সঙ্গে কাচের সংঘর্ষের সময় অপেক্ষাকৃত বেশি হয়। ফলে এর গতিশক্তি সমগ্র কাচে ছড়িয়ে পড়ে। এই কারণে কাচটি টুকরো টুকরো হয়ে ভেঙ্গে যায়। পক্ষান্তরে গুলির গতিবেগ অনেক বেশি হওয়ায় কাচের সঙ্গে গুলির সংঘর্ষের সময় অনেক কম হয়। তাই এটির গতিশক্তি শুধুমাত্র সংঘর্ষের জায়গায় সীমাবদ্ধ থাকে। ফলে কাচে গুলির পরিমাপ অনুযায়ী ছোট গর্ত হয়।

গাণিতিক উদাহরণ ৪.৬

১। 4 kg ভরের একটি পাখি একটি আম গাছে বসে আছে। পাখিটিকে 200 ms⁻¹ বেগে 20 g ভরের একটি বুলেট অনুভূমিকভাবে আঘাত করল। বুলেটটি পাখির মধ্যে রয়ে গেলে পাখিটির অনুভূমিক বেগ কত হবে নির্ণয় কর।

আমরা জানি,

$m_1u_1 + m_2u_2 = m_1v_1 + m_2v_2$

বা, $4 \times 0 + 0.02 \times 200 = 4 \times v_1 + 0.02 \times 0$

বা, $0 + 4 = 4v_1 + 0$

বা, $4v_1 = 4$

$\therefore \quad v_1 = 1\text{ ms}^{-1}$

এখানে,

পাখির ভর, $m_1 = 4\text{ kg}$

গুলির ভর, $m_2 = 20\text{ g} = 0.02\text{ kg}$

পাখির আদিবেগ, $u_1 = 0$

গুলির আদিবেগ, $u_2 = 200\text{ ms}^{-1}$

পাখির শেষ বেগ, $v_1 = ?$

গুলির শেষ বেগ, $v_2 = 0$

২। 40 kg ও 60 kg ভরের দুটি বস্তু যথাক্রমে 10 ms^{-1} ও 5 ms^{-1} বেগে পরস্পর বিপরীত দিক থেকে আসার সময় একে অপরকে ধাক্কা দিল। ধাক্কার পর বস্তুদ্বয় একত্রে যুক্ত হয়ে কত বেগে চলবে ?

প্রথম বস্তুর বেগ ধনাত্মক বিবেচনা করলে দ্বিতীয় বস্তুর বেগ ঋণাত্মক।

আমরা জানি, $m_1u_1 + m_2u_2 = m_1v_1 + m_2v_2$ ... ... (i)

মনে করি, যুক্ত অবস্থায় বস্তুদ্বয়ের বেগ = v

অর্থাৎ $v_1 = v_2 = v$ হলে, $m_1u_1 + m_2u_2 = v(m_1 + m_2)$

$40 \times v + 60v = 40 \times 10 + 60(-5)$

বা, $100v = 400 - 300$

বা, $100v = 100$

$\therefore v = 1\ ms^{-1}$

এখানে,
$m_1 = 40$ kg
$m_2 = 60$ kg
$u_1 = 10\ ms^{-1}$
$u_2 = -5\ ms^{-1}$
$v_1 = v_2 = v$

৩। 1200 kg ভরের একটি গাড়ি 20 ms^{-1} বেগে চলছিল। গাড়িটি চলতে চলতে থেমে থাকা 800 kg ভরের অন্য একটি স্থির গাড়িকে ধাক্কা দিল। ধাক্কার পর গাড়ি দুটি একত্রিত 50 m পথ অগ্রসর হয়ে থেমে গেল। বাধাদানকারী বলের মান কত?

আমরা জানি,

$m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1 + m_2)\ v$

বা, $1200 \times 20 + 800 \times 0 = (1200 + 800)\ v$

বা, $24000 = 2000\ v$

$\therefore v = 12\ ms^{-1}$

আবার $v^2 = v_0^2 + 2as$

বা, $0 = (12)^2 + 2 \times a \times 50$

বা, $0 = 144 + 100\ a$

বা, $100\ a = -144$

$\therefore a = -1{\cdot}44\ ms^{-2}$

এখানে,
প্রথম বস্তুর ভর, $m_1 = 1200$ kg
দ্বিতীয় বস্তুর ভর, $m_2 = 800$ kg
প্রথম বস্তুর বেগ, $v_1 = 20\ ms^{-1}$
দ্বিতীয় বস্তুর বেগ, $v_2 = 0$
মিলিত বেগ, v = ?
শেষ বেগ, $v' = 0$
দূরত্ব, $s = 50$ m
বাধাদানকারী বল, F = ?

$\therefore$ বাধাদানকারী বল, $F = ma = 2000 \times -1{\cdot}44 = -2880$ N

৪। 6 kg ভরের একটি বন্দুক হতে 0·01 kg ভরের একটি গুলি 300 ms^{-1} বেগে বের হয়ে গেল। বন্দুকের পশ্চাৎ বেগ নির্ণয় কর।

মনে করি বন্দুকের পশ্চাৎ বেগ = V

ভরবেগের নিত্যতা সূত্র হতে আমরা পাই,

$Mv + mV = 0$ ... ... (i)

বা, $Mv = -mV$

$\therefore$ সমীকরণ (i) হতে পাই,

$$v = \frac{-mV}{M} = \frac{0{\cdot}01\ kg \times 300\ ms^{-1}}{6\ kg} = 0{\cdot}5\ ms^{-1}$$

এখানে, M = 6 kg
m = 0·01 kg
$v = 300\ ms^{-1}$
V = ?

৫। 8 kg ভরের একটি বন্দুকের নল থেকে 10 g ভরের একটি গুলি বের হলে বন্দুকের প্রতিক্ষেপ বেগ 10 ms^{-1} হয়। গুলিটি লক্ষ্যবস্তুর মধ্যে 0·3 m প্রবেশ করার পর থেমে যায়। গুলিটির ওপর প্রযুক্ত বাধা নির্ণয় কর।

যেহেতু t গুলি ছোড়ার আগে বন্দুক ও গুলি উভয়ই স্থির ছিল ফলে এদের মোট ভরবেগের মান = 0

এবার বন্দুক ও গুলির ভর যথাক্রমে m_1 ও m_2 এবং এদের বেগ যথাক্রমে v_1 ও v_2 হলে, ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্র অনুযায়ী পাই,

$0 = m_1v_1 + m_2v_2$ ... ... (i)

বা, $0 = 8 \times 10 + \frac{10}{1000} \times v_2 = 80 + 1 \times 10^{-2}\ v_2$

বা, $v_2 = -\frac{80}{1 \times 10^{-2}} = -8 \times 10^3\ ms^{-1}$

লক্ষ্যবস্তুর মধ্যে 0·3 m প্রবেশ করার পর গুলির বেগ শূন্য হয়। গুলির মন্দন a হলে,

$v^2 = u^2 - 2as$ সমীকরণ (i) থেকে পাই,

$0 = (8 \times 10^3)^2 - 2a \times 0{\cdot}3$

বা, $a = \frac{(-8 \times 10)^2}{0{\cdot}6} = \frac{64 \times 10^6}{0{\cdot}6} = 6{\cdot}46 \times 10^5\ ms^{-2}$

এখানে,
$k = -8 \times 10^3\ ms^{-1}$

$\therefore$ বাধা, $P = ma = 0{\cdot}010 \times 6{\cdot}46 \times 10^5 = 6{\cdot}46 \times 10^2$ N

৬। 2500 kg ভরের একটি গাড়ি এবং 40 kmhr^{-1} বেগে ধাবমান 1×10^4 kg ওজনের একটি ট্রাকের সাথে সম্মুখ সংঘর্ষের পর ট্রাকের ওপর উঠে গেল। সংঘর্ষের পর গাড়িসহ ট্রাকটি 12 kmhr^{-1} বেগে অগ্রসর হলে গাড়ির বেগ নির্ণয় কর।

সংঘর্ষটি পূর্ণ অস্থিতিস্থাপক।

সুতরাং, ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্রানুসারে,

$$mu + MV = (m + M)v$$

$\therefore \quad 2500 \times u + 10000 \times 40 = (2500 + 10,000) \times 12$

বা, $\quad 2.5 \times 10^3\, u + 400 \times 10^3 = 12.5 \times 12 \times 10^3$

বা, $\quad 2.5\, u + 400 = 12.5 \times 12$

বা, $\quad 2.5\, u = 12.5 \times 12 - 400 = -250$

বা, $\quad u = -\dfrac{250}{2.5} = -100$ kmhr^{-1}

এখানে,

গাড়ির ওজন, $m = 2500$ kg

ট্রাকের ওজন, $M = 1 \times 10^4$ kg $= 10000$ kg

ট্রাকের বেগ, $V = 40$ kmhr^{-1}

গাড়িসহ ট্রাকের বেগ, $v = 12$ kmhr^{-1}

গাড়ির বেগ, $u = ?$

অতএব, সংঘর্ষের আগে গাড়িটি বিপরীত দিক থেকে 100 kmhr^{-1} বেগে গতিশীল ছিল।

৭। 3 kg ভরের বস্তুর ওপর একটি বল ক্রিয়াশীল আছে। বস্তুটির অবস্থান সমীকরণ $x = 3t - 4t^2 + t^3$, যেখানে x এর মান মিটারে এবং t এর মান সেকেন্ডে। $t = 0$ হতে $t = 4$ সেকেন্ড সময়ে বলটি দিয়ে বস্তুর ওপর কৃত কাজের পরিমাণ নির্ণয় কর। [BUET Admission Test, 2016-17]

আমরা জানি,

$$F = ma = m\frac{d^2x}{dt^2} = m\frac{d^2}{dt^2}(3t - 4t^2 + t^3)$$

$$= m\frac{d}{dt}(3 - 8t + 3t^2) = m(-8 + 6t)$$

আবার, $x = 3t - 4t^2 + t^3$

$\therefore \quad \dfrac{dx}{dt} = (3 - 8t^2 + 3t^2)$

$\therefore \quad dx = (3 - 8t + 3t^2)\, dt$

$$\therefore \quad W = \int_{x_2}^{x_2} F dx = \int_0^4 F(3 - 8t + 3t^2)\, dt$$

$$= m\int_0^4 (-8 + 6t)(3 - 8t + 3t^2)\, dt$$

$$= 3\left[\frac{18t^4}{4} - \frac{72t^3}{3} + \frac{82t^2}{2} - 24t\right]_0^4 = 528 \text{ J}$$

কাজ : দেখাও যে, ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্র থেকে নিউটনের তৃতীয় গতিসূত্র প্রতিপাদন করা যায়।

বাহ্যিক বল ক্রিয়া না করলে ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্র থেকে আমরা জানি যে কোনো সংস্থার (system) সংঘর্ষের আগে এবং পরে মোট ভরবেগ অপরিবর্তিত থাকে, অর্থাৎ

$$m_1u_1 + m_2u_2 = m_1v_1 + m_2v_2$$

একটি বলের প্রাথমিক ভরবেগ,

$$P_1 = mv_0$$

এবং সংঘর্ষের পরে ওই বলের ভরবেগ,

$$P_2 = mv$$

$\therefore$ ভরবেগের পরিবর্তন, $P_1 - P_2 = mv_0 - mv$

অতএব, $m_1(v_1 - u_1) = -m_2(v_2 - u_2)$

এখানে,

m_1 ও m_2 বস্তু দুটির ভর

u_1 ও u_2 এদের প্রাথমিক বেগ

v_1 ও v_2 এদের চূড়ান্ত বেগ

যদি ক্রিয়া-প্রতিক্রিয়া t সময় ধরে স্থয়ী হয় তবে,

$$m_1 \frac{(v_1 - u_1)}{t} = - m_2 \frac{(v_2 - u_2)}{t}$$

$$\therefore \quad m_1 a_1 = - m_2 a_2$$

বা, $F_1 = - F_2$

অর্থাৎ বস্তু দুটির পারস্পরিক ক্রিয়ার ক্ষেত্রে ক্রিয়া এবং প্রতিক্রিয়া পরস্পরের সমান এবং বিপরীত। **এটিই নিউটনের তৃতীয় গতিসূত্র।**

৪.১১ নিউটনের গতির তৃতীয় সূত্র ও ভরবেগের নিত্যতা
Newton's third law of motion and conservation of momentum

নিউটনের গতির তৃতীয় সূত্র ক্রিয়া ও প্রতিক্রিয়া ছাড়া আর কিছুই নয়। একটি বস্তু যখন অন্য একটি বস্তুর ওপর বল প্রয়োগ করে তখন দ্বিতীয় বস্তুটিও প্রথম বস্তুর ওপর একটি সমান ও বিপরীতমুখি বল প্রয়োগ করে। প্রথম বস্তু দ্বিতীয় বস্তুর ওপর যে বল প্রয়োগ করে তাকে যদি ক্রিয়া (Action) ধরা হয়, তবে দ্বিতীয় বস্তু কর্তৃক প্রথম বস্তুটির ওপর প্রযুক্ত বলকে প্রতিক্রিয়া (Reaction) বলা হয়।

দুটি বস্তু স্থির থাকুক বা গতিশীল হোক একে অপরকে স্পর্শ করুক বা পরস্পর থেকে দূরে থাকুক নিউটনের তৃতীয় সূত্র সকল ক্ষেত্রে প্রযোজ্য হবে।

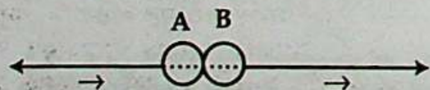
ক্রিয়া ও প্রতিক্রিয়া সম্পর্ক কার্যকারণ সম্পর্ক নয়। ক্রিয়া ও প্রতিক্রিয়া একে অপরের সরণে বা পরে ক্রিয়াশীল হয় না। বল দুটি সব সময় একসঙ্গে ক্রিয়া করে। ক্রিয়া যতক্ষণে স্থায়ী হয়, প্রতিক্রিয়াও ঠিক ততক্ষণ স্থায়ী হয়। ক্রিয়া বন্ধ হলে প্রতিক্রিয়াও বন্ধ হয়ে যায়।

প্রকৃতিতে বল সকল সময় জোড়ায় জোড়ায় ক্রিয়া করে। প্রকৃতিতে একক বিচ্ছিন্ন বল বলে কিছু থাকতে পারে না। আমরা যখন বলি, একটি বল ক্রিয়া করছে তখন আসলে দুটি ক্রিয়াশীল বলের মধ্যে একটির কথা বলি। এই দুটি বল একে অপরের পরিপূরক।

উপরোক্ত আলোচনা হতে নিউটনের গতির তৃতীয় সূত্র ও ভরবেগের নিত্যতা সূত্র সম্বন্ধে একটি ধারণা পাওয়া যায়। সূত্রটি হলো :

সূত্র : প্রত্যেক ক্রিয়ার একটি সমান ও বিপরীত প্রতিক্রিয়া রয়েছে। অর্থাৎ প্রত্যেক ক্রিয়ামূলক বলের একটি সমান ও বিপরীত প্রতিক্রিয়ামূলক বল রয়েছে। এই সূত্রকে বস্তুসমূহের মধ্যে বলের পারস্পরিক ক্রিয়ার সূত্র বলা যায়। কাজেই ক্রিয়ামূলক বল $\vec{F}$ ও প্রতিক্রিয়ামূলক বল $\vec{R}$ হলে, $\vec{F} = - \vec{R}$। **অপরদিকে ক্রিয়া ও প্রতিক্রিয়া ভিন্ন অন্য কোনো বল ক্রিয়া না করলে রৈখিক ভরবেগের কোনো পরিবর্তন হয় না।**

ব্যাখ্যা : নিউটনের তৃতীয় সূত্রানুসারে যদি একটি বস্তু A অপর একটি বস্তু B-এর ওপর বল প্রয়োগ করে, তা হলে B বস্তুও A বস্তুর ওপর সমান ও বিপরীতমুখি বল প্রয়োগ করবে [চিত্র ৪.১৭]।



চিত্র ৪.১৭

A-এর দ্বারা প্রযুক্ত বল হলো ক্রিয়া এবং B-এর দ্বারা প্রযুক্ত বল হলো প্রতিক্রিয়া। কাজেই ক্রিয়া $\vec{F}$ ও প্রতিক্রিয়া $\vec{R}$ হলে, $\vec{F} = -\vec{R}$ ক্রিয়া ও প্রতিক্রিয়া দুটি ভিন্ন বস্তুর ওপর প্রযুক্ত হয়। ক্রিয়া না থাকলে প্রতিক্রিয়াও থাকে না। ক্রিয়া বা প্রতিক্রিয়া বলের কার্যকাল t হলে $\vec{F} \times t = - \vec{R} \times t$ ... ... (4.15)

অর্থাৎ, ক্রিয়াজনিত বলের ঘাত = —প্রতিক্রিয়াজনিত বলের ঘাত।

এটি স্থির বা গতিশীল যে-কোনো বস্তুর ক্ষেত্রে সমভাবে প্রযোজ্য।

নিচে কয়েকটি উদাহরণের সাহায্যে নিউটনের গতির তৃতীয় সূত্র এবং ভরবেগের নিত্যতা ব্যাখ্যা করা হলো।

উদাহরণ :

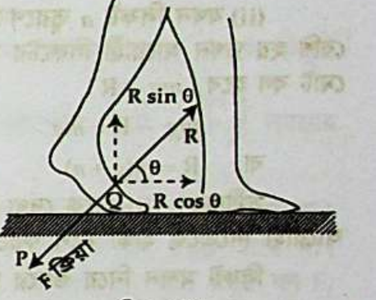
১। **টেবিলের উপর বই থাকা** : একটি টেবিলের ওপর বই রাখা হলে বই-এর ওজন টেবিলের উপর লম্বভাবে চাপ প্রয়োগ করবে। এটিই ক্রিয়া। নিউটনের গতির তৃতীয় সূত্রানুসারে টেবিল বই-এর ওপর ওপরের দিকে সমপরিমাণ বল প্রয়োগ করবে। এটি হলো প্রতিক্রিয়া। ক্রিয়া এবং প্রতিক্রিয়া সমান ও বিপরীত হওয়ায় বইটি টেবিলের ওপর সাম্যাবস্থায় থাকে।

২। **বন্দুক হতে গুলি ছোড়া** : যখন বন্দুক হতে শিকারী গুলি ছোড়ে তখন সে পেছন দিকে একটা ধাক্কা অনুভব করে। প্রাথমিক অবস্থায় বন্দুক ও গুলি উভয়েরই বেগ শূন্য থাকে। ফলে তাদের মিলিত ভরবেগও শূন্য থাকে। গুলি

ছোড়া হলে তা সামনের দিকে একটা ভরবেগ প্রাপ্ত হয়। নিউটনের তৃতীয় সূত্রানুসারে বন্দুকটি গুলির সমান ও বিপরীত ভরবেগ প্রাপ্ত হবে অর্থাৎ বন্দুকটি সমান ভরবেগে পেছনের দিকে যাবে এবং শিকারী পেছন দিকে ধাক্কা অনুভব করবে।

৩। **নৌকা থেকে লাফ দেয়া :** যখন আরোহী নৌকা হতে নদীর পাড়ে লাফিয়ে পড়ে, তখন নৌকাটিকে পেছনে ছুটে যেতে দেখা যায়। আরোহী নৌকার ওপর যে বল প্রয়োগ করে তাতে নৌকাটি পেছনে যায়। নিউটনের তৃতীয় সূত্রানুসারে নৌকাও আরোহীর ওপর সমান ও বিপরীতমুখি বল প্রয়োগ করে। ফলে আরোহী তীরে পৌঁছায়।

৪। **পায়ে হাঁটা :** আমরা যখন পায়ে হেঁটে চলি তখন সামনের পা মাটির উপর লম্বভাবে নিচের দিকে একটা বল প্রয়োগ করে। এর নাম ক্রিয়া। মাটিও সামনের পায়ের তলার ওপর সমান ও বিপরীতমুখি বল প্রয়োগ করে। এর নাম প্রতিক্রিয়া। ক্রিয়া এবং প্রতিক্রিয়া সমান এবং বিপরীত হওয়ায় সামনের পা স্থির থাকে।



চিত্র ৪.১৮

কিন্তু পেছনের পা মাটির উপর Q বিন্দুতে তির্যকভাবে $\vec{F}$ পরিমাণ বল QP বরাবর ক্রিয়া করে [চিত্র ৪.১৮]। এই বল অনুভূমিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে। নিউটনের তৃতীয় সূত্রানুসারে মাটি পায়ের তলার উপর সমান ও বিপরীতমুখি প্রতিক্রিয়া বল প্রয়োগ করে।

মনে করি প্রতিক্রিয়া বল $\vec{R}$। ফলে $\vec{R} = -\vec{F}$। প্রতিক্রিয়া বলের অনুভূমিক অংশক $R \cos \theta$ আমাদেরকে সামনের দিকে এগিয়ে নেয় এবং উল্লম্ব অংশক $R \sin \theta$ শরীরের ওজন বহন করতে সাহায্য করে।

কিন্তু পিচ্ছিল পথে চলা শক্ত হয়। কারণ পথ পিচ্ছিল হলে মাটির ওপর যথেষ্ট বল প্রয়োগ করা পায়ের পক্ষে সম্ভব হয় না। ফলে পায়ের ওপর মাটির প্রতিক্রিয়া বল এবং সাথে সাথে প্রতিক্রিয়া বলের অনুভূমিক অংশক কম হয়। এজন্যে পিচ্ছিল পথে চলা শক্ত হয়। মার্বেলের তৈরি মেঝে, বালুকাময় রাস্তায় হাঁটতে একই সমস্যা।

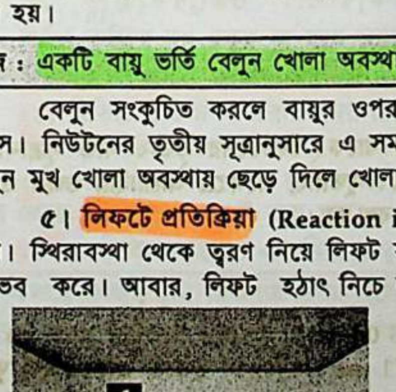
কাজ : গাড়ির টায়ারের বাইরের দিক খাঁজ যুক্ত করে তৈরি করা হয় কেন ?

গাড়ির টায়ারের বাইরের দিকে খাঁজযুক্ত করে তৈরি করা হয়। কারণ এতে গাড়িটি এর সঠিক গতির জন্য প্রয়োজনীয় ঘর্ষণ বল লাভ করে। এই খাঁজের ফলে টায়ার রাস্তাকে যথাযথভাবে আঁকড়ে ধরতে সমর্থ হয়। এভাবে আঁকড়ে ধরতে না পারলে গাড়িটি স্থিতিশীল অবস্থা হতে গতিশীল হতে পারত না। আবার গতিশীল অবস্থায় ব্রেক করা হলে টায়ার পিছলে যেত। তাই গাড়িটিকে যথাযথভাবে চালনা করার জন্য টায়ারের বাইরের দিক খাঁজযুক্ত করে তৈরি করা হয়।

কাজ : একটি বায়ু ভর্তি বেলুন খোলা অবস্থায় ছেড়ে দিলে খোলা মুখের বিপরীত দিকে ছুটতে দেখা যায় কেন ?

বেলুন সংকুচিত করলে বায়ুর ওপর একটি বল প্রয়োগ করে। ফলে খোলা মুখ দিয়ে বায়ু সজোরে বেরিয়ে আসে। নিউটনের তৃতীয় সূত্রানুসারে এ সময় বায়ুও বেলুনের ওপর একটি বিপরীত বল প্রয়োগ করে। তাই বায়ু ভর্তি বেলুন মুখ খোলা অবস্থায় ছেড়ে দিলে খোলা মুখের বিপরীত দিকে ছুটতে দেখা যায়।

৫। **লিফটে প্রতিক্রিয়া (Reaction in a lift) :** লিফটে ওঠানামা করার সময় আমরা ওজনের পরিবর্তন অনুভব করি। স্থিরাবস্থা থেকে ত্বরণ নিয়ে লিফট যখন ওপরে উঠতে থাকে তখন একজন আরোহী নিজেকে অপেক্ষাকৃত ভারী অনুভব করে। আবার, লিফট হঠাৎ নিচে নামতে শুরু করলে আরোহীর তখন বিপরীত অনুভূতি হয় অর্থাৎ আরোহী হাল্কা অনুভব করে। লিফট যখন স্থির থাকে বা সমবেগে চলে অর্থাৎ ত্বরণ না থাকে তখন বস্তুর আপাত ওজনের কোনো পরিবর্তন হয় না। চলন্ত লিফটে আরোহীর ওজনের পরিবর্তন নিউটনের গতিসূত্রের সাহায্যে ব্যাখ্যা করা যায়।


চিত্র ৪.১৯

(i) লিফট যখন a ত্বরণে ওপরে উঠে : মনে করি m ভরের একজন আরোহী লিফটের মেঝেতে দাঁড়িয়ে আছে [চিত্র ৪.১৯]। ওই আরোহী লিফটের মেঝেতে mg পরিমাণ বল প্রয়োগ করে। লিফটের মেঝে আরোহীর ওপর ঊর্ধ্বমুখি প্রতিক্রিয়া বল R ক্রিয়া করে। এই প্রতিক্রিয়া বল R আরোহীর ওজন mg অপেক্ষা বেশি হলে আরোহী লিফটের সঙ্গে a ত্বরণে ওপরে উঠবে।

আরোহীর ওপর মোট ঊর্ধ্বমুখি বল $= R - mg$

এখন, নিউটনের দ্বিতীয় গতিসূত্র অনুযায়ী আমরা পাই,

$$R - mg = ma$$

বা, $$R = mg + ma = m(g + a) \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(i)}$$

মেঝের এই প্রতিক্রিয়াই বস্তু বা ব্যক্তির কার্যকর ওজন। সুতরাং, ওই আরোহীর ওজন,

$$W' = m(g + a)$$

সমীকরণ (i) থেকে দেখা যাচ্ছে যে প্রতিক্রিয়া বল আরোহীর ওজন (mg) অপেক্ষা বেশি হওয়ায় আরোহী নিজেকে তুলনামূলকভাবে ভারী মনে করবে।

লিফট মন্দন নিয়ে নামতে থাকলে আরোহীর ওজনের একইরকম বৃদ্ধি ঘটে।

(ii) যখন লিফট a ত্বরণে নিচে নামে : আরোহীর ওজন (mg) যখন লিফট দ্বারা প্রদত্ত প্রতিক্রিয়া বল R-এর চেয়ে বেশি হয় তখন আরোহী লিফটের সঙ্গে লিফটের ত্বরণ a সহ নিচে নামে [চিত্র ৪.১৮]। এক্ষেত্রে আরোহীর ওপর প্রযুক্ত মোট বল হবে, $mg - R$।

$$mg - R = ma$$

বা, $R = m(g + a)$ ... ... (ii)

সমীকরণ (ii) থেকে দেখা যায় যে আরোহীর ওপর লিফটের প্রতিক্রিয়া R আরোহীর ওজনের তুলনায় কম হওয়ায় আরোহী নিজেকে হাল্কা মনে করবে।

লিফট মন্দন নিয়ে ওপরে উঠলেও আরোহীর একই অনুভূতি হবে।

(iii) লিফট যখন স্থির থাকে বা সমবেগে ওঠানামা করে : লিফট যখন স্থির থাকে অথবা সমবেগে চলাচল করে তখন এর ত্বরণ $a = 0$; সুতরাং বস্তু বা আরোহীর ওপর প্রতিক্রিয়া বল $R = mg$। অর্থাৎ প্রতিক্রিয়া বল আরোহীর ওজনের সমান হয়। সুতরাং এক্ষেত্রে আরোহী বা বস্তুর ওজনের কোনো আপাত পরিবর্তন ঘটবে না।

(iv) লিফট যখন অবাধে নিচে নামে : লিফট যখন অবাধে নিচে নামে তখন এর ত্বরণ $a = g$। সুতরাং প্রতিক্রিয়া $R = 0$। অর্থাৎ এক্ষেত্রে লিফটের মেঝে আরোহীর ওপর কোনো ঊর্ধ্বমুখি বল প্রয়োগ করবে না। আরোহীও লিফটের মেঝেতে নিচের দিকে কোনো বল প্রয়োগ করবে না। সুতরাং, লিফটের মধ্যে আরোহী নিজেকে সম্পূর্ণ ভারহীন (Weightless) মনে করবে।

(v) লিফট যখন অভিকর্ষজ ত্বরণ অপেক্ষা বেশি ত্বরণে নিচে নামে : ধরা যাক, লিফট কোনোভাবে অভিকর্ষজ ত্বরণ g অপেক্ষা বেশি ত্বরণে (অর্থাৎ $a > g$) নিচের দিকে গতিশীল। এই অবস্থায় লিফটের গতি শুরু হওয়ার সাথে সাথে আরোহী বা বস্তুর সাথে লিফটের মেঝের সংস্পর্শ বিচ্ছিন্ন হয়। ফলে আরোহীর ঊর্ধ্বমুখি গতি থাকবে যতক্ষণ পর্যন্ত না আরোহীর মাথা লিফটের ছাদ স্পর্শ করে। তখন লিফটের ছাদ আরোহীর ওপর নিচের দিকে প্রতিক্রিয়া বল R প্রয়োগ করে। অতএব, নিউটনের দ্বিতীয় গতি সূত্রানুসারে লেখা যায়,

$$R + mg = ma$$

বা, $R = m(a + g)$ ... ... (iii)

এখন আরোহী ছাদের সংস্পর্শে থেকে লিফটের সাথে নিচে নামতে থাকে। নিউটনের তৃতীয় গতি সূত্রানাসারে আরোহীও লিফটের ছাদের গায়ে ওপরের দিকে $m(a - g)$ বল প্রয়োগ করে। সুতরাং, এক্ষেত্রে আরোহীর ওজন ওপরের দিকে ক্রিয়া করে। এই ঘটনাকে **অতিভারহীনতা (super weightlessness)** বলা হয়।

গাণিতিক উদাহরণ ৪.৭

১। একটি লিফটের ছাদে আটকানো একটি স্প্রিং তুলার হুক থেকে 3·0 kg ভর ঝুলছে। লিফটটি যখন (i) 0·25 ms^{-2} ত্বরণে ওপরে উঠছে, (ii) 0·2 ms^{-2} ত্বরণে নিচে নামছে, (iii) 0·1 ms^{-1} সমবেগে উঠছে তখন স্প্রিং তুলার পাঠগুলো কী কী হবে ?

(i) এখানে লিফটের ঊর্ধ্বমুখি ত্বরণ, $a = 0·25\ ms^{-2}$

∴ স্প্রিং তুলাতে কার্যকরী টান, $T = m(g + a) = 3·0\,(9·8 + 0·25)$

$= 3 \times 10·05 = 30·15\ N$

∴ স্প্রিং তুলাতে পাঠ হবে, $\frac{T}{g} = \frac{30·15}{9·8} = 3·077\ kg$

(ii) লিফটের নিম্নমুখি ত্বরণ, $a = 0·2\ ms^{-2}$

∴ স্প্রিং তুলাতে কার্যকরী টান, $T = m(g - a) = 3·0\,(9·8 - 0·2)$

$= 28·8\ N$

∴ স্প্রিং তুলাতে পাঠ হবে, $\frac{T}{g} = \frac{28·8}{9·8} = 2·939\ kg$

(iii) লিফটটি 0·1 ms^{-1} সমবেগে নিচে নামলে এর ত্বরণ হয় শূন্য। এক্ষেত্রে,

$\therefore$ স্প্রিং তুলাতে টান, $T = mg = 3{\cdot}0 \times 9{\cdot}8 = 29{\cdot}4$ N

$\therefore$ স্প্রিং তুলাতে পাঠ হবে, $\frac{T}{g} = \frac{3{\cdot}0 \times 9{\cdot}8}{9{\cdot}8} = 3{\cdot}0$ kg

৪·১২ ভরবেগের নিত্যতার গানিতিক ব্যাখ্যা
Mathematical explanation of conservation of momentum

নিউটনের গতির প্রথম সূত্র থেকে আমরা জানি যে, কোনো বস্তুর ওপর প্রযুক্ত বল যদি শূন্য হয়, তাহলে বস্তুটি সরল পথে ধ্রুব বেগে চলতে থাকে। সময়ের সাপেক্ষে বেগ $\vec{v}$ যদি ধ্রুব হয়, তাহলে ভরবেগও $\left(\vec{P} = m\vec{v}\right)$ সময়ের সাপেক্ষে ধ্রুব থাকে।

সূত্র : যখন কোনো ব্যবস্থার উপর প্রযুক্ত বাহ্যিক বল শূন্য হয়, তখন ব্যবস্থাটির মোট ভরবেগ সংরক্ষিত থাকে।

মনে করি m_1 ও m_2 ভরের দুটি বস্তু আছে। এই বস্তু সমষ্টির ওপর বাহ্যিক কোনো বল প্রযুক্ত হচ্ছে না। অতএব বস্তু দুটি কেবলমাত্র পারস্পরিক ক্রিয়া-প্রতিক্রিয়া বলের প্রভাবে চলছে। যদি m_1 এর উপর m_2 দ্বারা প্রযুক্ত বল F_1 হয় তাহলে নিউটনের তৃতীয় সূত্র অনুযায়ী m_2 এর উপর m_1 এর সমান ও বিপরীতমুখি বল F_2 প্রয়োগ করবে অর্থাৎ

$$F_1 = -F_2 \qquad \ldots \qquad (4.16)$$

ক্রিয়া ও প্রতিক্রিয়া বল একই সময় ধরে প্রযুক্ত হয়।

মনে করি m_1 ও m_2 ভরের বস্তু দুটির ভরবেগ যথাক্রমে P_1 এবং P_2। অতএব নিউটনের দ্বিতীয় সূত্র অনুযায়ী

$$F_1 = \frac{dP_1}{dt} \text{ এবং } F_2 = \frac{dP_2}{dt}$$

$\therefore$ সমীকরণ (4.16) থেকে পাই,

$$\frac{dP_1}{dt} = -\frac{dP_2}{dt}$$

বা, $\frac{dP_1}{dt} + \frac{dP_2}{dt} = 0$

বা, $\frac{d}{dt}(P_1 + P_2) = 0 \qquad \therefore P_1 + P_2 =$ ধ্রুবক বা $P =$ ধ্রুবক

অর্থাৎ বাহ্যিক বল প্রযুক্ত না হলে ভরবেগ ধ্রুব থাকে। **এটাই ভরবেগের সংরক্ষণ নীতি।**

উপরের আলোচনা হতে আমরা যে সকল বিষয় জানতে পেরেছি তা হলো :

(১) নীতিটি প্রতিপাদন করার সময় ক্রিয়া ও প্রতিক্রিয়া বলের প্রকৃতি নিয়ে আলোচনা করা হয় নি।

(২) এই নীতি যেকোনো ধরনের পারস্পরিক ক্রিয়ার ক্ষেত্রে প্রযোজ্য।

(৩) ভরবেগ একটি ভেক্টর রাশি। অর্থাৎ এই নীতি অনুযায়ী বিচ্ছিন্ন বস্তু সমষ্টির ভরবেগের পরিবর্তন কেবলমাত্র বাইরে থেকে বল প্রয়োগ দ্বারাই করা যায়।

(৪) এ নীতির সাহায্যে একাধিক বস্তুর মধ্যে পারস্পরিক ক্রিয়া সম্পর্কে জটিল সমস্যার সমাধান করা যায়।

হাতে-কলমে কাজ: তুমি রিকশার উপর বসে রিকশার চালককে রিকশা চালাতে বলো। রিকশা চলতে থাকবে। এখন তোমার রিকশা সমতল রাস্তা থেকে যখন উঁচু রাস্তার দিকে চলবে তখন রিকশার গতি কমে যাবে। এবার তুমি গদি থেকে ওঠে দাঁড়িয়ে জোরে সামনের দিকে শরীরকে এগিয়ে নিয়ে রিকশার গদিতে বল প্রয়োগ করে বস। রিকশা সামনের দিকে আগের চেয়ে বেশি জোরে চলবে। কেন—ব্যাখ্যা কর।

উঁচু রাস্তার কারণে রিকশার বেগ কমে যায়, ফলে ভরবেগও কমে যায়। পুনরায় রিকশায় বল প্রয়োগ করার কারণে ভরবেগ সৃষ্টি হয়। ফলে রিকশা সামনে এগিয়ে যাবে। কিন্তু মোট ভরবেগ সংরক্ষিত থাকবে।

৪·১৩ ঘূর্ণন গতি
Rotational motion

সময়ের পরিবর্তনের সাথে যখন কোনো বস্তুর অবস্থানের পরিবর্তন হয় তখন এর অবস্থাকে গতি বলে। যেমন গাড়ি, মানুষ ইত্যাদি। কোনো গতিশীল বস্তু যদি সরলরেখা বরাবর চলে তবে বস্তুটির গতিকে চলন গতি বলে। দালানের ছাদ থেকে কোনো বস্তু ছেড়ে দিলে অথবা সোজা পথে চলা কোনো গাড়ির গতি চলন গতি।

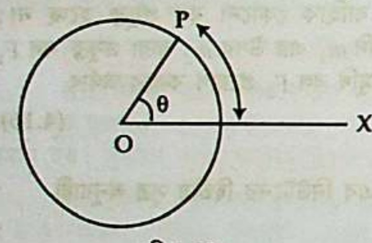
আবার কোনো বস্তু যদি একটি নির্দিষ্ট বিন্দু বা অক্ষের চতুর্দিকে বৃত্তাকার পথে গতিশীল থাকে তবে ওই গতিকে ঘূর্ণন গতি বলে। যেমন বৈদ্যুতিক পাখার গতি। যে অক্ষের চতুর্দিকে বস্তুটি ঘূর্ণায়মান হয় তাকে ঘূর্ণন অক্ষ (axis of rotation) বলে।

ঘূর্ণনের বৈশিষ্ট্যসমূহ : ঘূর্ণন গতির নিম্নোক্ত বৈশিষ্ট্য রয়েছে—
(i) কোনো বস্তুর ঘূর্ণন হলে তার প্রতিটি কণা কোনো নির্দিষ্ট সময়ের অবকাশে একই কোণে ঘুরে।
(ii) ঘূর্ণন অক্ষ সবসময় স্থির থাকে।

৪.১৪ ঘূর্ণন গতি সংক্রান্ত রাশিমালা
Terms related to rotational motion

৪.১৪.১ কৌণিক সরণ
Angular displacement

মনে করি, এই বইয়ের পাতার মতো যেকোনো একটি সমতলের উপর একটি কণা কোনো নির্দিষ্ট বিন্দু O এর চারদিকে বৃত্ত পথে ঘুরছে। এখানে ঘূর্ণাক্ষ বৃত্তের কেন্দ্র O বিন্দু দিয়ে যাবে এবং বৃত্তের তলের সঙ্গে লম্ব হবে [চিত্র ৪.২০]। যেকোনো মুহূর্তে কণাটির অবস্থান জানার জন্য ওই সমতলে একটি স্থির সরলরেখা OX কল্পনা করতে হয়। OX-কে নির্দেশ রেখা (reference line) বলে।



চিত্র ৪.২০

কণাটি নির্দেশ রেখা অতিক্রম করার মুহূর্ত থেকে সময় গণনা শুরু করলে মনে করি, t সময় পর কণাটির অবস্থান হলো P। স্পষ্টত OP ব্যাসার্ধ OX রেখার সঙ্গে যে θ কোণ উৎপন্ন করে তা জানলেই কণাটির অবস্থান সম্পূর্ণরূপে জানা যায়। θ কোণকে কণার কৌণিক সরণ (angular displacement) বলে। OP ব্যাসার্ধ ভেক্টর।

সংজ্ঞা : বৃত্তীয় গতিতে সচল কণার ব্যাসার্ধ ভেক্টর কোনো নির্দিষ্ট সময়ের অবকাশে যে কোণে সরে যায়, তাকে ওই সময়ের অবকাশে কণাটির কৌণিক সরণ বলে।

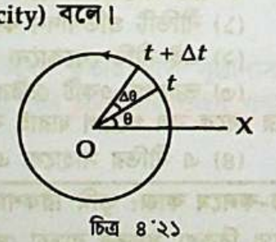
রেডিয়ান এককে প্রকাশ করলে কৌণিক সরণ θ এর সঙ্গে সংশ্লিষ্ট বৃত্তের চাপ s-এর সম্পর্ক খুবই সরল হয়। বৃত্তের ব্যাসার্ধ r হলে লেখা যায়,

$$\theta = \frac{s}{r} \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (4.17)$$

৪.১৪.২ কৌণিক বেগ
Angular velocity

রৈখিক গতির মতো কৌণিক গতিও সম বা অসম (ত্বরিত) হতে পারে। **কৌণিক গতি অসম হলে কৌণিক সরণ এবং অতিক্রান্ত সময়ের অনুপাতকে কণার গড় কৌণিক বেগ (average angular velocity) বলে।** একে ω অক্ষর দিয়ে প্রকাশ করা হয়। কৌণিক বেগ ধনাত্মক বা ঋণাত্মক হতে পারে। কৌণিক সরণের মতো একই রীতি এখানে অনুসরণ করা হয়।

অতি ক্ষুদ্র সময়ের অবকাশ Δt তে কণার কৌণিক সরণ $\Delta\theta$ হলে [চিত্র ৪.২২] ওই সময়ের অবকাশে কণার গড় কৌণিক বেগ হবে



চিত্র ৪.২১

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (4.18)$$

কোনো নির্দিষ্ট মুহূর্তের কৌণিক বেগ জানতে হলে সময়ের অবকাশকে ক্ষুদ্র থেকে ক্ষুদ্রতর করতে হয়। সময়ের অবকাশের সীমাস্থ মান শূন্য হলে ওই অবকাশে গড় কৌণিক বেগ তাৎক্ষণিক কৌণিক বেগের (instantaneous angular velocity) সমান হয়। সুতরাং, অতি ক্ষুদ্র সময়ে কৌণিক সরণের পরিবর্তনের তাৎক্ষণিক হারকে তাৎক্ষণিক কৌণিক বেগ (ω) বলে।

অর্থাৎ $\omega = \underset{\Delta t \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$

সাধারণত কৌণিক বেগ বলতে তাৎক্ষণিক কৌণিক বেগ বোঝায়।

কৌণিক বেগের মান স্থির থাকলে বৃত্তীয় গতিকে সমবৃত্তীয় গতি (uniform circular motion) বলে। সমবৃত্তীয় গতির ক্ষেত্রে t সময়ে কৌণিক সরণ θ হলে কৌণিক বেগের মান হয়

$$\omega = \frac{\theta}{t} \text{ অথবা } \theta = \omega t \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (4.19)$$

এই সমীকরণটি সমরৈখিক গতির সমীকরণ $s = vt$-এর অনুরূপ।

একক : সাধারণত কৌণিক বেগকে রেডিয়ান/সেকেন্ড (radian/sec বা সংক্ষেপে rad/s) এককে প্রকাশ করা হয়। যন্ত্রবিদ্যা বা ইঞ্জিনিয়ারিং-এ আরেকটি একক প্রচলিত আছে। এর নাম আবর্তন/মিনিট বা প্রতি মিনিটে আবর্তন সংখ্যা (revolution per minute, সংক্ষেপে rpm)।

কৌণিক বেগের মাত্রা : $[\omega] = \left[\dfrac{\text{রৈখিক বেগ}}{\text{ব্যাসার্ধ}}\right] = \dfrac{[LT^{-1}]}{[L]} = [T^{-1}]$

একবার পূর্ণ আবর্তন করতে কণার যে সময় লাগে তাকে পর্যায়কাল (time period) বলে। একটি পূর্ণ আবর্তন বলতে 2π রেডিয়ান কৌণিক সরণ বোঝায়। সুতরাং পর্যায়কাল T হলে (4.19) সমীকরণ অনুযায়ী

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (4.20)$$

$\frac{1}{T}$ একক সময়ে পূর্ণ আবর্তনের সংখ্যা বোঝায়। একে কম্পাঙ্ক (frequency) বলে। কম্পাঙ্ককে 'n' দিয়ে সূচিত করলে আমরা পাই, $\omega = 2\pi n$। আবার সময় t এবং ঘূর্ণন সংখ্যা N হলে $\omega = \frac{2\pi N}{t}$

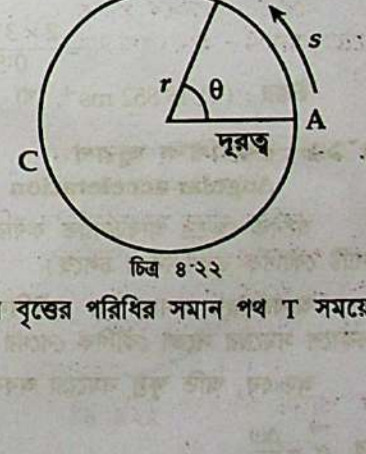
$$\therefore \ \omega = 2\pi n = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi N}{t} \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (4.21)$$

৪.১৫ কৌণিক বেগ ও রৈখিক বেগের মধ্যে সম্পর্ক

Relation between angular velocity and linear velocity

আমরা জানি, রৈখিক পথে নির্দিষ্ট দিকে কোনো একটি বস্তুর প্রতি সেকেন্ডের রৈখিক সরণই রৈখিক বেগ এবং বৃত্তাকার পথে কোনো একটি বস্তুর প্রতি সেকেন্ডের কৌণিক সরণই কৌণিক বেগ। রৈখিক বেগকে v_0 অথবা v এবং কৌণিক বেগকে ω দ্বারা প্রকাশ করা হয়। রৈখিক বেগ এবং কৌণিক বেগের সম্পর্কজনিত সমীকরণটি এখন প্রতিপাদন করা হবে।

মনে করি একটি বস্তুকণা r ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্তের পরিধি বরাবর ω সমকৌণিক বেগে ঘুরছে [চিত্র ৪.২২]। যদি T সেকেন্ডে কণাটি বৃত্তের সম্পূর্ণ পরিধি একবার ঘুরে আসে তবে কৌণিক বেগের সংজ্ঞানুসারে,



চিত্র ৪.২২

$$\omega = \frac{\text{কৌণিক দূরত্ব}}{\text{সময়}} = \frac{2\pi}{T}$$

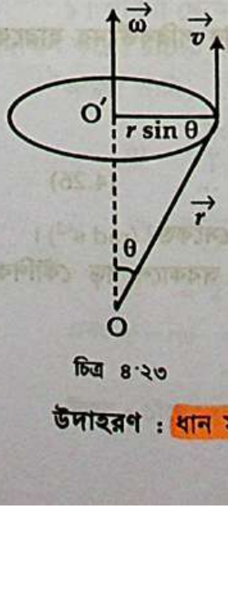
$$\text{বা, } T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (4.22)$$

আবার কৌণিক বেগ ω, কৌণিক সরণ θ হলে ঘূর্ণন সংখ্যা $N = \frac{\theta}{2\pi}$

এখন যদি বৃত্তাকার পথে না ঘুরে কণাটি v বেগে একই সময়ে সরলরেখায় বৃত্তের পরিধির সমান পথ T সময়ে অতিক্রম করে, তবে

$$v = \frac{\text{বৃত্তের পরিধি}}{\text{পরিধির সমান দূরত্ব অতিক্রম করতে সময়}} = \frac{2\pi r}{T}$$

$$\text{বা, } T = \frac{2\pi r}{v} \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (4.23)$$



চিত্র ৪.২৩

সমীকরণ (4.22) এবং সমীকরণ (4.23) হতে আমরা পাই, $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi r}{v}$

$$\text{বা, } \quad \frac{1}{\omega} = \frac{r}{v}$$

$$\text{বা, } \quad v = \omega r \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (4.24)$$

অর্থাৎ, রৈখিক বেগ = কৌণিক বেগ × বৃত্তের ব্যাসার্ধ।

সমীকরণ (4.24) এর ভেক্টর রূপ হলো : $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$; এই তিনটি ভেক্টরের দিক চিত্র ৪.২৩-এ দেখানো হলো।

উল্লেখ থাকে যে, বৃত্তীয় গতি যদি অসম হয়, তবুও যে কোনো বিন্দুতে $v = \omega r$। বস্তুটি সমকৌণিক বেগে চললে ω = ধ্রুবক। অতএব $v \propto r$ অর্থাৎ রৈখিক বেগ ঘূর্ণন অক্ষ হতে দূরত্বের সমানুপাতিক।

উদাহরণ : ধান মাড়াইয়ের ক্ষেত্রে দূরবর্তী গরুকে সবচেয়ে বেশি বেগে হাঁটতে হয়।

অনুসন্ধানমূলক কাজ : মাঝে মাঝে বোলার কর্তৃক নিক্ষিপ্ত ক্রিকেট বল নিক্ষেপ বেগের চেয়ে বেশি বেগে ভূমি থেকে প্রতিফলিত হয়—ব্যাখ্যা কর।

ভূমি স্পর্শ করার সময় যদি ক্রিকেট বলটির স্পিন (spin) বা ঘূর্ণন থাকে তবে বলের স্পিন বা ঘূর্ণন গতিশক্তি ওর রৈখিক গতিশক্তির সঙ্গে যুক্ত হয়। ফলে সম্মিলিত গতিশক্তির জন্য ক্রিকেট বলটি নিক্ষেপ বেগ অপেক্ষা বেশি বেগে ভূমি থেকে প্রতিফলিত হয়।

গাণিতিক উদাহরণ ৪.৮

১। একটি কণা 1·5 m ব্যাসার্ধের বৃত্তাকার পথে প্রতি মিনিটে 120 বার আবর্তন করে। এর (ক) রৈখিক বেগ, (খ) পর্যায়কাল এবং (গ) কৌণিক বেগ কত ? [রা. বো. ২০০১]

এখানে,
বৃত্তাকার পথের ব্যাসার্ধ, $r = 1{\cdot}5$ m

আবর্তন বা কম্পন সংখ্যা, $n = \dfrac{120}{1\text{ min}} = \dfrac{120}{60\text{ s}} = 2\text{ s}^{-1} = 2\text{ Hz}$

আমরা জানি,

(ক) রৈখিক বেগ, $v = \omega r$

$$\therefore\ v = 2\pi nr = 2\times 3{\cdot}142\times 2\times 1{\cdot}5 = 18{\cdot}852\text{ ms}^{-1}$$

(খ) পর্যায়কাল, $T = \dfrac{t}{N} = \dfrac{60}{120} = 0{\cdot}5$ s $\left[\because T = \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{\frac{N}{t}} = \dfrac{t}{N}\right]$

বা, $T = \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{2} = 0{\cdot}5$ s

(গ) কৌণিক বেগ, $\omega = 2\pi n = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{2\times 3{\cdot}142}{0{\cdot}5} = 12{\cdot}568\text{ rad s}^{-1}$

উত্তর : (ক) $18{\cdot}852\text{ ms}^{-1}$, (খ) $0{\cdot}5$ s, (গ) $12{\cdot}568\text{ rad s}^{-1}$

৪·১৬ কৌণিক ত্বরণ
Angular acceleration

অনেক ক্ষেত্রে আবর্তনরত কণার কৌণিক বেগ বাড়ে বা কমে। কৌণিক বেগ পরিবর্তিত হলে বোঝা যায় যে কণাটি কৌণিক ত্বরণ নিয়ে চলছে।

আবর্তনরত কণার গড় **কৌণিক ত্বরণ** (average angular acceleration) বলতে কোনো নির্দিষ্ট সময়ের অবকাশে সময়ের সঙ্গে কৌণিক বেগের পরিবর্তনের হার বোঝায়।

অতএব, অতি ক্ষুদ্র সময়ের অবকাশ Δt-তে কৌণিক বেগের পরিবর্তন $\Delta\omega$ হলে ঐ অবকাশে গড় কৌণিক ত্বরণ

হবে, $\vec{\alpha} = \dfrac{\Delta\omega}{\Delta t}$ ... ... (4.25)

সুতরাং কৌণিক ত্বরণের নিম্নোক্ত সংজ্ঞা দেওয়া যায়,

সংজ্ঞা : সময় ব্যবধান শূন্যের কাছাকাছি হলে সময়ের সাথে বস্তুর কৌণিক বেগের পরিবর্তনের হারকে কৌণিক ত্বরণ বলে।

ক্যালকুলাস-এর নিয়ম ব্যবহার করে পাই,

$$\alpha = \underset{\Delta t\to 0}{\text{Lt}}\frac{\Delta\omega}{\Delta t}\ \text{বা},\ \alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{d\theta}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad \dots \quad \dots \quad (4.26)$$

কৌণিক ত্বরণ বলতে সাধারণত তাৎক্ষণিক কৌণিক ত্বরণ বোঝায়। এর একক রেডিয়ান/সেকেন্ড² (rad s^{-2})।

আবর্তনরত কণার কৌণিক ত্বরণ ধ্রুবক হলে তাৎক্ষণিক কৌণিক ত্বরণ যেকোনো সময়ের অবকাশে গড় কৌণিক ত্বরণের সমান হয়। এক্ষেত্রে t সময়ে কৌণিক বেগের বৃদ্ধি ω হলে, কৌণিক ত্বরণ, $\alpha = \dfrac{\omega}{t}$

কৌণিক ত্বরণের মাত্রা, $[\alpha] = \left[\dfrac{\omega}{T}\right] = \left[\dfrac{T^{-1}}{T}\right] = [T^{-2}]$

গাণিতিক উদাহরণ ৪.৯

১। একটি মোটর সাইকেল 400 m ব্যাসার্ধের বৃত্তাকার পথে সুষম গতিতে ঘুরছে। মোটর সাইকেলটি 30 sec এ একবার বৃত্ত পরিক্রম করলে এর রৈখিক ত্বরণ কত ?

মোটর সাইকেলের পর্যায়কাল, $T = 30\ \text{sec}$

$\therefore$ কৌণিক বেগ, $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{30}\ \text{rad s}^{-1}$

$\therefore$ রৈখিক বেগ, $v = r\omega = 400 \times \frac{2\pi}{30}$

$= 26.67\pi\ \text{ms}^{-1}$

অতএব, রৈখিক ত্বরণ, $a = \frac{v^2}{r} = \frac{(26.67\pi)^2}{400}$

$= 17.53\ \text{ms}^{-2}$

৪.১৭ কৌণিক ত্বরণ ও রৈখিক ত্বরণের মধ্যে সম্পর্ক
Relation between angular accelaration and linear accelaration

মনে করি একটি বস্তুকণা r ব্যাসার্ধবিশিষ্ট [চিত্র ৪.২৪] বৃত্তের পরিধি বরাবর অসম বৃত্তাকার গতিতে আবর্তন করছে। বস্তুকণাটির t সময়ে রৈখিক বেগ = v, কৌণিক বেগ = ω, রৈখিক ত্বরণ = a এবং কৌণিক ত্বরণ = α।

আমরা জানি,

$$v = \omega r \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (4.27)$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

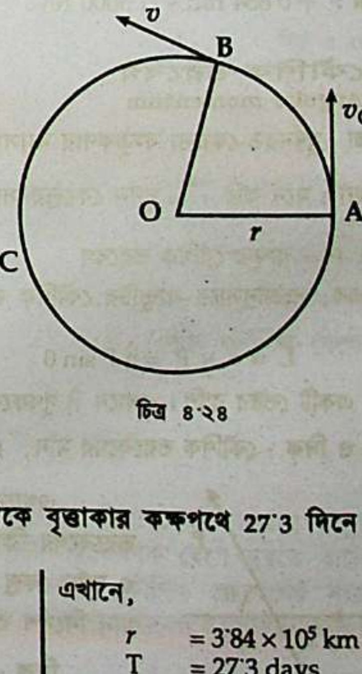
এবং $a = \frac{dv}{dt}$

সমীকরণ 4.27-এর উভয় পক্ষকে t-এর সাপেক্ষে ব্যবকলন করে পাই,

$$\frac{dv}{dt} = \omega\frac{dr}{dt} + \frac{d\omega}{dt}r = \frac{r d\omega}{dt} \quad [\because r = \text{ধ্রুবক}]$$

বা, $a = \alpha r \quad [\because \frac{d\omega}{dt} = \alpha]$

অর্থাৎ **রৈখিক ত্বরণ = কৌণিক ত্বরণ × ব্যাসার্ধ**



চিত্র ৪.২৪

গাণিতিক উদাহরণ ৪.১০

১। পৃথিবী থেকে চাঁদের দূরত্ব 3.84×10^5 km এবং চাঁদ পৃথিবীকে বৃত্তাকার কক্ষপথে 27.3 দিনে একবার প্রদক্ষিণ করে। চাঁদের কৌণিক এবং রৈখিক দ্রুতি নির্ণয় কর।

আমরা জানি,

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ এবং $v = r\omega$

$\therefore \omega = \frac{2 \times 3.14}{27.3 \times 24 \times 60 \times 60}$

$= 2.662 \times 10^{-6}\ \text{rad s}^{-1}$

এবং $v = r\omega = 3.84 \times 10^5 \times 2.662 \times 10^{-6}$

$= 1.022\ \text{kms}^{-1}$

এখানে,

$r = 3.84 \times 10^5$ km

$T = 27.3$ days

$= 27.3 \times 24 \times 60 \times 60$ s

$\omega = ?$

$v_T = ?$

উত্তর : চাঁদের কৌণিক বেগ $2.662 \times 10^{-6}\ \text{rad s}^{-1}$ এবং রৈখিক দ্রুতি $1.022\ \text{kms}^{-1}$।

২। একটি বৈদ্যুতিক পাখা মিনিটে 1500 বার বা 1500 rpm ঘুরে। সুইচ বন্ধ করার 4 মিনিট পর পাখাটি বন্ধ হয়ে যায়। পাখাটির কৌণিক ত্বরণ কত ? থেমে যাওয়ার আগে পাখাটি কত বার ঘুরবে ? [চ. বো. ২০০৭]

এখানে,

আদি কৌণিক বেগ, $\omega_0 = 1500 \text{ rev min}^{-1} = \dfrac{1500 \times 2\pi \text{ rad}}{60 \text{ s}} = 50\,\pi \text{ rads}^{-1}$

সময়, $t = 4$ মিনিট $= 4 \times 60 \text{ s} = 240 \text{ s}$

শেষ কৌণিক বেগ, $\omega = 0$

কৌণিক ত্বরণ, $\alpha = ?$

কৌণিক সরণ, $\theta = ?$

আমরা জানি,

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

বা, $\alpha = \dfrac{\omega - \omega_0}{t}$

$$= \frac{0 - 50\pi \text{ rads}^{-1}}{240 \text{ s}}$$

$$= -0{\cdot}654 \text{ rad s}^{-2}$$

আবার,

$$\theta = \left(\frac{\omega_0 + \omega}{2}\right) t$$

বা, $\theta = \left(\dfrac{50\pi \text{ rad s}^{-1} + 0}{2}\right) \times 240 \text{ s} = 6000\,\pi \text{ rad}$

$\therefore$ থেমে যাওয়ার আগে পাখাটির ঘূর্ণন সংখ্যা $N = \dfrac{\theta}{2\pi} = \dfrac{6000\,\pi}{2\,\pi} = 3000 \text{ rev.}$

উত্তর : $-0{\cdot}654 \text{ rad s}^{-2}$; 3000 rev.

৪·১৮ কৌণিক ভরবেগ
Angular momentum

সংজ্ঞা : ঘূর্ণনরত কোনো বস্তুকণার ব্যাসার্ধ ভেক্টর ও রৈখিক ভরবেগের ভেক্টর গুণফলকে কৌণিক ভরবেগ বলে।

ব্যাখ্যা : মনে করি $\vec{r}$ = ঘূর্ণন কেন্দ্রের সাপেক্ষে কোনো বস্তুকণার ব্যাসার্ধ ভেক্টর

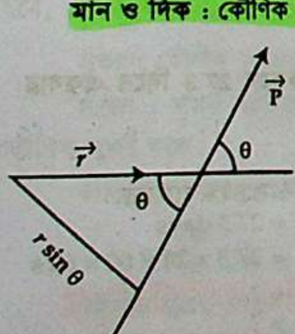
এবং $\vec{P}$ = বস্তুর রৈখিক ভরবেগ

অতএব, সংজ্ঞানুসারে বস্তুটির কৌণিক ভরবেগ

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P} = \hat{\eta}\, P \sin\theta \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (4.28)$$

এটি একটি ভেক্টর রাশি। এখানে $\hat{\eta}$ গুণফলের দিক বা কৌণিক ভরবেগের দিক নির্দেশ করে।

মান ও দিক : কৌণিক ভরবেগের মান, $L = rP \sin\theta$



চিত্র ৪.২৫

এখানে θ হচ্ছে $\vec{r}$ ও $\vec{P}$-এর মধ্যবর্তী কোণ [চিত্র ৪.২৫]। ঘূর্ণন কেন্দ্র হতে ভরবেগের ক্রিয়ারেখার লম্ব দূরত্ব হচ্ছে $r \sin\theta$। অতএব, কোনো বস্তুকণার ভরবেগ ও ঘূর্ণন কেন্দ্র হতে ভরবেগের ক্রিয়া রেখার লম্ব দূরত্বের গুণফল কৌণিক ভরবেগের মান নির্দেশ করে।

দিক : $\vec{r}$ ও $\vec{P}$ যে তলে অবস্থিত $\vec{L}$ এর দিক হবে ঐ তলের লম্ব বরাবর। ক্রস গুণনের নিয়ম দ্বারা $\vec{L}$-এর দিক নির্ধারিত হবে।

অনুসিদ্ধান্ত : কণাটি বৃত্তাকার পথে বৃত্তের কেন্দ্রের সাপেক্ষে গতিশীল হলে, $\vec{r}$ ও $\vec{P}$-এর মধ্যবর্তী কোণ $\theta = 90°$। সেক্ষেত্রে

$$L = rP \sin\theta = rP = r(mv) = mr\,(r\,\omega) = mr^2\omega \quad \ldots \quad \ldots \quad (4.29)$$

একক ও মাত্রা সমীকরণ : এম. কে. এস. ও এস. আই. পদ্ধতিতে কৌণিক ভরবেগের একক হচ্ছে $\text{kgm}^2\text{s}^{-1}$ এবং মাত্রা সমীকরণ $[L]$ = [ভরবেগ × দূরত্ব] $= [MLT^{-1} L] = [ML^2T^{-1}]$

৪.১৯ কৌণিক ভরবেগ এবং কৌণিক বেগের মধ্যে সম্পর্ক
Relation between angular momentum and angular velocity

মনে করি একটি বস্তু ω কৌণিক বেগে একটি অক্ষের চারদিকে ঘুরছে। বস্তুটি অনেকগুলো বস্তুকণার সমষ্টি হলে আমরা লিখতে পারি,

$$L = l_1 + l_2 + l_3 + \dots\dots + l_n$$ [এখানে $l_1, l_2 \dots\dots l_n$ পরস্পর সমান্তরাল।]

বা, $$L = r_1p_1 + r_2p_2 + r_3p_3 + \dots\dots + r_np_n$$
$$= r_1m_1v_1 + r_2m_2v_2 + \dots\dots + r_nm_nv_n$$
$$= r_1m_1\omega r_1 + r_2m_2\omega r_2 + \dots\dots\dots$$
$$= m_1r_1^2\omega + m_2r_2^2\omega + \dots\dots\dots$$
$$= \omega\Sigma mr^2$$
$$= I\omega$$

অর্থাৎ $L = I\omega$ ... ... (4.30)

এখানে, $\omega = 2\pi n = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi N}{t}$

সমীকরণ (4.30) হলো কৌণিক ভরবেগ এবং কৌণিক বেগের সম্পর্ক। উক্ত সম্পর্ক হতে কৌণিক ভরবেগের অপর একটি সংজ্ঞা দেয়া যেতে পারে।

সংজ্ঞা : ঘূর্ণন অক্ষ সাপেক্ষে কোনো একটি বস্তুর জড়তার ভ্রামক এবং কৌণিক বেগের গুণফলকে কৌণিক ভরবেগ বলে।

কৌণিক ভরবেগের ভেক্টর রূপ : কৌণিক ভরবেগ একটি ভেক্টর রাশি। এই ভেক্টরের অভিমুখ ঘূর্ণাক্ষ বরাবর। একটি দক্ষিণাবর্তী স্ক্রুকে কণার আবর্তনের দিকে ঘোরালে স্ক্রুটি যেদিকে অগ্রসর হয় কৌণিক ভরবেগ ভেক্টর সেদিকে ক্রিয়া করে [চিত্র ৪.২৬]।

চিত্র ৪.২৬

জানার বিষয় :

I. একক কৌণিক বেগে ঘূর্ণনরত বস্তুর জড়তার ভ্রামক এর কৌণিক ভরবেগের সমান। ($L = I\omega, \omega = 1$)

II. একক কৌণিক বেগে ঘূর্ণনরত বস্তুর জড়তার ভ্রামক গতিশক্তির দ্বিগুণ। ($K = \frac{1}{2}I\omega^2 \therefore \omega = 1$)

অনুধাবনমূলক কাজ : দেখাও যে, সমকৌণিক বেগে ঘূর্ণনরত কোনো বস্তুর জড়তার ভ্রামক এর কৌণিক ভরবেগের সমান।

আমরা জানি, ঘূর্ণন গতির ক্ষেত্রে কৌণিক ভরবেগ = জড়তার ভ্রামক × কৌণিক বেগ

বা, $L = I\omega$। কৌণিক বেগের মান একক হলে বা $\omega = I$ হলে $L = I$ হয়। তাই একক কৌণিক বেগে ঘূর্ণনরত বস্তুর জড়তার ভ্রামক এর কৌণিক ভরবেগের সমান।

৪.২০ কৌণিক ভরবেগের নিত্যতা বা সংরক্ষণ সূত্র
Law of conservation of angular momentum

কৌণিক গতির জন্য নিউটনের প্রথম সূত্র হতে আমরা জানি বাহ্যিক টর্কের ক্রিয়াতেই কেবলমাত্র বস্তুর কৌণিক বেগের তথা কৌণিক ভরবেগের পরিবর্তন হয়। টর্কের ক্রিয়া না থাকলে বস্তুটি সমকৌণিক বেগে ঘুরতে থাকে। অর্থাৎ সময়ের সাপেক্ষে কৌণিক বেগ ধ্রুব হয়। ফলে কৌণিক ভরবেগও ধ্রুব হয়। একে কৌণিক ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্র বলে। সুতরাং বলা যায়, কোনো বস্তুর উপর টর্কের লব্ধি শূন্য হলে বস্তুটির কৌণিক ভরবেগ সংরক্ষিত থাকে।

গাণিতিক প্রমাণ : আমরা জানি কৌণিক ভরবেগ,

$L = I\omega$ ... ... (4.31)

এখানে L বস্তুর কৌণিক ভরবেগ, I জড়তার ভ্রামক এবং ω কৌণিক বেগ।

সমীকরণ (4.31)-কে সময়ের সাপেক্ষে ব্যবকলন করে পাওয়া যায়,

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}(I\omega) = I\frac{d\omega}{dt}$$

কিন্তু $\frac{d\omega}{dt} = \alpha$

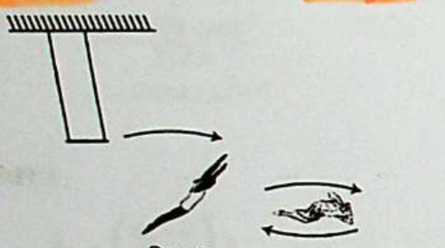
অতএব, $\frac{dL}{dt} = I\alpha = \tau$ [নিউটনের কৌণিক গতির ২য় সূত্র অনুসারে]

এখন $\tau = 0$, অর্থাৎ বস্তুর উপর টর্ক ক্রিয়াশীল না হলে,

$\frac{dL}{dt} = 0 \quad \therefore \; L =$ ধ্রুবক

কাজেই, বস্তুর উপর ক্রিয়ারত বহিস্থ টর্কের লব্ধি শূন্য হলে অথবা, বাইরে থেকে কোনো টর্ক প্রযুক্ত না হলে কোনো অক্ষের সাপেক্ষে ঘূর্ণায়মান বস্তুর কৌণিক ভরবেগের পরিবর্তন হবে না। এটিই কৌণিক ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্র।

উদাহরণ : তোমরা সার্কাসে ট্রাপিজ খেলা দেখে থাকলে দেখবে খেলোয়াড়রা শূন্যে নানা রকম কসরৎ দেখায়। দোলনা থেকে লাফ দেয়ার সময় খেলোয়াড়ের হাত ও পা সোজা প্রসারিত থাকে। এই সময় তার কৌণিক বেগ খুব কম থাকে। এবার হাত ও পা গুটিয়ে বুকের কাছে আনলে খেলোয়াড়ের কৌণিক বেগ বেড়ে যায়; ফলে তার পক্ষে শূন্যে পর পর ডিগবাজী খাওয়া সম্ভব হয়। হাত পা গুটিয়ে নেয়ার জন্য খেলোয়াড়টির জড়তার ভ্রামক (I) কমে যায়; কিন্তু তার কৌণিক ভরবেগ $L = I\omega$ ধ্রুব থাকে বলে I কমে যাওয়ায় কৌণিক বেগ ω বেড়ে যায় [চিত্র ৪.২৭]।


চিত্র ৪.২৭

যাচাই কর : ডাইভিং বোর্ড থেকে লাফ দেয়ার সময় অথবা বরফের উপর স্কেটিং করতে করতে পায়ের আঙ্গুলের উপর ভর দিয়ে ঘোরার যে কসরৎ দেখানো হয় সেগুলোর ব্যাখ্যা দাও।

৪.২১ জড়তার ভ্রামক ও চক্রগতির ব্যাসার্ধ
Moment of inertia and radius of gyration

৪.২১.১ জড়তার ভ্রামক
Moment of inertia

যখন কোনো দৃঢ় বস্তু একটি নির্দিষ্ট অক্ষে আবদ্ধ থাকে, তখন ওই বস্তুর উপর বল প্রয়োগ করলে, আবদ্ধ থাকার কারণে বস্তুটি সরলরেখায় চলতে পারে না। বস্তুটি অক্ষের চারদিকে ঘুরে এবং বস্তুর প্রতিটি কণার কৌণিক সরণ হয়। অক্ষের সাপেক্ষে বস্তুর এ ধরনের গতিকে ঘূর্ণন বা আবর্ত গতি বলে। অক্ষ বস্তুর ভেতরে বা বাইরে থাকতে পারে।

সংজ্ঞা : একটি দৃঢ় বস্তু কোনো একটি স্থির অক্ষের চারদিকে আবর্তিত হতে থাকলে ওই অক্ষের সাপেক্ষে বস্তুটির জড়তার ভ্রামক বলতে অক্ষ হতে প্রতিটি কণার দূরত্বের বর্গ ও এদের প্রত্যেকের ভরের গুণফলের সমষ্টিকে বুঝায়।

ব্যাখ্যা : মনে করি B একটি দৃঢ় বস্তু [চিত্র ৪.২৮]। এটি একটি নির্দিষ্ট অক্ষ XY-এর চারদিকে ω সমকৌণিক বেগে ঘুরছে। যদি বস্তুটি $m_1, m_2, m_3 \ldots\ldots\ldots m_n$ ভরের অসংখ্য বস্তুকণার সমষ্টি হয় এবং ভরগুলো ঘূর্ণন অক্ষ হতে যথাক্রমে $r_1, r_2, r_3 \ldots\ldots\ldots r_n$ দূরে অবস্থিত হয় তাহলে সংজ্ঞানুসারে ঐ অক্ষ সাপেক্ষে,

প্রথম কণার জড়তার ভ্রামক $= m_1r_1^2$

দ্বিতীয় কণার জড়তার ভ্রামক $= m_2r_2^2$

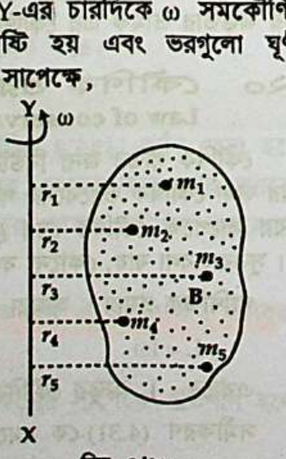
তৃতীয় কণার জড়তার ভ্রামক $= m_3r_3^2$

ও n-তম কণার জড়তার ভ্রামক $= m_nr_n^2$

অতএব, সংজ্ঞানুসারে সমগ্র বস্তুটির ঐ অক্ষ সাপেক্ষে জড়তার ভ্রামক,

$$I = m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + m_3r_3^2 + \ldots\ldots\ldots m_nr_n^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} m_ir_i^2 \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \qquad (4.32)$$



চিত্র ৪.২৮

$\left[\sum_{i=1}^{n} \right.$ চিহ্ন দ্বারা রাশিগুলোর সমষ্টি বুঝানো হয়েছে। $\left. \right]$

সমাকলনের সাহায্যে জড়তার ভ্রামক নিম্নোক্তভাবে প্রকাশ করা যায়,

$$I = \int r^2 dm \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \qquad (4.33)$$

এখানে dm হচ্ছে বস্তুটির অতি ক্ষুদ্র অংশের ভর এবং r হচ্ছে ঘূর্ণন অক্ষ হতে ওই ক্ষুদ্র অংশটির দূরত্ব।

জড়তার ভ্রামকের একক ও মাত্রা সমীকরণ (Unit and dimension of moment of inertia) :

এম. কে. এস. ও এস. আই. পদ্ধতিতে জড়তার ভ্রামকের একক কিলোগ্রাম-মিটার^2 (kg-m^2)।

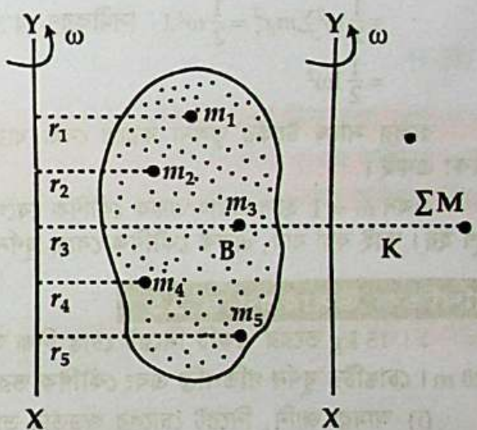
এর মাত্রা সমীকরণ [I] = [ভর × দূরত্ব^2] = [ML^2]

জানার বিষয় : জড়তার ভ্রামক নির্ভর করে—

I. ঘূর্ণন অক্ষের অবস্থানের ওপর।
II. দৃঢ় বস্তুর আকৃতির ওপর।
III. ঘূর্ণন অক্ষের চারদিকে দৃঢ় বস্তুর ভরের বিন্যাসের ওপর।

৪.২১.২ চক্রগতির ব্যাসার্ধ
Radius of gyration

সংজ্ঞা : যদি কোনো দৃঢ় বস্তুর মোট ভর একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে কেন্দ্রীভূত আছে মনে করা হয় এবং ঘূর্ণন অক্ষ সাপেক্ষে ওই বিন্দু ভরের জড়তার ভ্রামক সমগ্র বস্তুটির জড়তার ভ্রামকের সমান হয়, তবে অক্ষ হতে ওই বিন্দুর দূরত্বকে চক্রগতির ব্যাসার্ধ বলা হয়। একে K দ্বারা চিহ্নিত করা হয়।



চিত্র ৪.২৯

ব্যাখ্যা : মনে করি B একটি দৃঢ় বস্তু যা একটি নির্দিষ্ট অক্ষ XY-এর সাপেক্ষে ঘুরছে। দৃঢ় বস্তুটি $m_1, m_2, m_3 \ldots\ldots m_n$ ভরের অসংখ্য বস্তু কণার সমন্বয়ে গঠিত এবং কণাগুলি ঘূর্ণন অক্ষ থেকে যথাক্রমে $r_1, r_2, r_3 \ldots\ldots\ldots r_n$ দূরত্বে অবস্থিত।

এখন মনে করি, ঘূর্ণন অক্ষ থেকে K দূরত্বে [চিত্র ৪.২৯] একটি বিন্দুভর।

$M = \sum m_i = (m_1 + m_2 + m_3 + \ldots\ldots\ldots + m_n)$ অবস্থিত।

স্পষ্টতই, উভয় ক্ষেত্রে জড়তার ভ্রামক একই হবে।

অর্থাৎ

$$MK^2 = \sum m_i r_i^2 = (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \ldots\ldots\ldots + m_n r_n^2) \quad \ldots \quad \ldots \quad (4.34)$$

$$\therefore \quad K = \sqrt{\frac{m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \ldots\ldots\ldots + m_n r_n^2}{M}}$$

$$= \sqrt{\frac{I}{M}} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (4.35)$$

নির্দিষ্ট অক্ষের সাপেক্ষে কোনো বস্তুর চক্রগতির ব্যাসার্ধ 0.2 m বলতে বুঝা যায় ওই অক্ষ হতে 0.2 m দূরে বস্তুটির সমগ্র ভর কেন্দ্রীভূত আছে বিবেচনা করে জড়তার ভ্রামক নির্ণয় করতে বস্তুটির মোট জড়তার ভ্রামক পাওয়া যাবে।

উদাহরণ : ব্যাস সাপেক্ষে একটি নিরেট গোলকের জড়তা ভ্রামক $I = \frac{2}{5} MR^2$। অতএব, ব্যাস সাপেক্ষে এর চক্রগতির ব্যাসার্ধ,

$$K = \sqrt{\frac{I}{M}} = \sqrt{\frac{\frac{2}{5} MR^2}{M}} = \sqrt{\frac{2}{5}}\, R$$

৪.২২ ঘূর্ণন গতিশক্তি
Rotational kinetic energy

মনে করি B একটি দৃঢ় বস্তু ω কৌণিক বেগে XY অক্ষের চতুর্দিকে [চিত্র ৪.২৫] বৃত্তাকার পথে সমকৌণিক বেগে ঘুরছে। এই ঘূর্ণনের জন্য বস্তুটির কিছু গতিশক্তি থাকে। এই গতিশক্তিকে ঘূর্ণন বা আবর্ত গতিশক্তি বলে।

ধরা যাক, m_1 কণার রৈখিক বেগ v_1, অতএব $v_1 = \omega r_1$

m_2 কণার রৈখিক বেগ v_2, অতএব $v_2 = \omega r_2$

m_3 কণার রৈখিক বেগ v_3, অতএব $v_3 = \omega r_3$

সুতরাং, m_1 কণার গতিশক্তি $= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 \omega^2 r_1^2$

m_2 কণার গতিশক্তি $= \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_2 \omega^2 r_2^2$

m_3 কণার গতিশক্তি $= \frac{1}{2} m_3 v_3^2 = \frac{1}{2} m_3 \omega^2 r_3^2$

এভাবে বস্তুর সকল কণার গতিশক্তি নির্ণয় করে যোগ করলে সমগ্র বস্তুটির গতিশক্তি পাওয়া যায়। সুতরাং বস্তুটি ঘূর্ণন গতিশক্তি

$$
\begin{aligned}
E_k &= \frac{1}{2} m_1 \omega^2 r_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \omega^2 r_2^2 + \frac{1}{2} m_3 \omega^2 r_3^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \\
&= \frac{1}{2} \omega^2 [m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \ldots] \\
&= \frac{1}{2} \omega^2 \Sigma m_i r_i^2 = \frac{1}{2} \omega^2 . I \quad \text{[সমীকরণ (4.34) অনুসারে]} \\
&= \frac{1}{2} I\omega^2 \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (4.36)
\end{aligned}
$$

বলের সাথে টর্কের তুলনা করলে দেখা যায় যে রৈখিক গতিতে ভরের যে ভূমিকা ঘূর্ণন গতির ক্ষেত্রে জড়তার ভূমিকা একই।

এখন $\omega = 1$ হলে অর্থাৎ একক কৌণিক বেগে ঘূর্ণনরত বস্তুর ক্ষেত্রে জড়তার ভ্রামক, $I = 2E$ হয় বা গতিশক্তির দ্বিগুণ হয়। তাই বলা যায়, **একক কৌণিক বেগে ঘূর্ণনরত বস্তুর জড়তার ভ্রামক গতিশক্তির দ্বিগুণ।**

গাণিতিক উদাহরণ ৪.১১

১। 15 kg ভরের একটি নিরেট চোঙ নিজ অক্ষ সাপেক্ষে 50 rad s^{-1} কৌণিক বেগে ঘুরছে। চোঙটির ব্যাসার্ধ 0.20 m। চোঙটির ঘূর্ণন গতিশক্তি এবং কৌণিক ভরবেগ নির্ণয় কর।

(i) আমরা জানি, নিরেট চোঙের জড়তার ভ্রামক,

$I = \frac{1}{2} Mr^2$

$\therefore \quad I = \frac{1}{2} \times 15 \times (0.20)^2 = 0.3 \text{ kgm}^2$

এখানে,
$M = 15$ kg
$r = 0.20$ m
$\omega = 50$ rad s^{-1}

এখন, ঘূর্ণায়মান চোঙের ঘূর্ণন গতিশক্তি,

$E_r = \frac{1}{2} I\omega^2$

$\therefore \quad E_r = \frac{1}{2} \times 0.3 \times (50)^2 = 375$ J

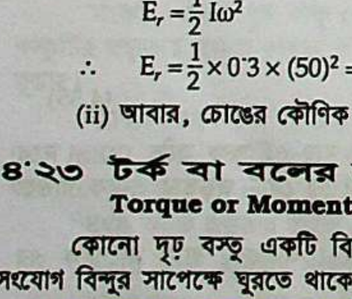
(ii) আবার, চোঙের কৌণিক ভরবেগ, $L = I\omega = 0.3 \times 50 = 15 \text{ kgm}^2 \text{ s}^{-1}$

৪.২৩ টর্ক বা বলের ভ্রামক

Torque or Moment of a force

কোনো দৃঢ় বস্তু একটি বিন্দুকে কেন্দ্র করে ঘুরতে পারে। যেমন দেয়ালে ঝুলানো ফটো পেরেক ও সুতার সংযোগ বিন্দুর সাপেক্ষে ঘুরতে থাকে; আবার গাড়ির চাকা তার অক্ষের সাপেক্ষে ঘুরতে পারে।

কোনো নির্দিষ্ট অক্ষের চারদিকে ঘূর্ণায়মান কোনো বস্তুতে ত্বরণ সৃষ্টির জন্য প্রযুক্ত দ্বন্দ্বের ভ্রামককে টর্ক বা বলের ভ্রামক বলে। একে τ (টাউ) দ্বারা সূচিত করা হয়।



চিত্র ৪.৩০

ব্যাখ্যা : ধরা যাক, O বিন্দুতে একটি পাতলা পাত অনুভূমিক অবস্থায় এমনভাবে আবদ্ধ আছে যে তা উল্লম্ব অক্ষ XOY-এর চতুর্দিকে O-কে কেন্দ্র করে ঘুরতে পারে [চিত্র ৪.৩০]। পাতটিকে তার কোনো বিন্দু C-তে বল প্রয়োগ করে ঘুরালে দেখা যায় যে,

(১) প্রযুক্ত বলের মান যত বেশি হবে, তার ঘূর্ণন সৃষ্টির ক্ষমতাও তত বেশি হবে।

(২) O হতে প্রযুক্ত বল F-এর লম্ব দূরত্ব d যত বেশি হবে, ওই বলে ঘূর্ণন সৃষ্টির ক্ষমতাও তত বেশি হবে।

(৩) বলের ক্রিয়ামুখ O বিন্দু অভিমুখী হলে, পাতটিতে কোনো ঘূর্ণন হবে না।

উপরোক্ত কারণে কোনো অক্ষ বা বিন্দুর সাপেক্ষে কোনো বলের ভ্রামকের মান বলের পরিমাণ ও অক্ষ হতে বলের ক্রিয়া রেখার লম্ব দূরত্ব d-এর গুণফল দ্বারা নির্দিষ্ট হয়।

$$\therefore \quad \tau = d \times F \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (4.37)$$

বা, বলের ভ্রামক বা টর্ক = বল × লম্ব দূরত্ব

চিত্র ৪.২৯-এ O হতে F বলের ক্রিয়াবিন্দু C-এর দূরত্ব = r ও F বলের ক্রিয়ারেখা NC-এর দূরত্ব = d এবং $\angle NCO = \theta$ নির্দেশ করা হয়েছে।

কাজেই, $ON = d = r \sin\theta$

$$\therefore \quad \tau = d \times F = r F \sin\theta$$

ভেক্টর বীজগণিতের সাহায্যে τ-কে নিম্ন উপায়ে লেখা হয়,

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (4.38)$$

এখানে, $\vec{r}$ ও $\vec{F}$ যথাক্রমে অবস্থান ভেক্টর ও প্রযুক্ত বল। r ও F যে তলে অবস্থিত τ-এর দিক হবে ওই তলের অভিলম্ব বরাবর। ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে অর্থাৎ বামাবর্তে (anti-clockwise) ঘূর্ণনের জন্য τ-এর অভিমুখ হচ্ছে উপর দিকে এবং মান ধনাত্মক। ঘড়ির কাঁটার দিকে অর্থাৎ দক্ষিণাবর্তে (clockwise) ঘূর্ণনের জন্য τ-এর অভিমুখ নিচের দিকে এবং মান ঋণাত্মক।

সমীকরণ (4.38) অনুসারে টর্কের নিম্নোক্ত গাণিতিক সংজ্ঞা দেয়া যায়।

সংজ্ঞা : অক্ষের সাপেক্ষে ঘূর্ণনরত বস্তুর ওপর যে বিন্দুতে বল ক্রিয়াশীল ওই বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর ও প্রযুক্ত বলের ভেক্টর গুণফলকে টর্ক বলে।

টর্ক বা বলের ভ্রামকের একক (Unit of torque or moment of force)

এস. আই. পদ্ধতিতে টর্ক বা বলের ভ্রামকের একক নিউটন-মিটার (N-m)।

টর্ক বা বলের ভ্রামকের মাত্রা সমীকরণ (Dimension of torque or moment of force)

টর্ক বা বলের ভ্রামকের সংজ্ঞা হতে এর মাত্রা সমীকরণ প্রতিপাদন করা যায়। বলের ভ্রামকের মাত্রা সমীকরণ,

[টর্ক বা বলের ভ্রামক] = [বল × দূরত্ব] = $[MLT^{-2} \times L] = [ML^2T^{-2}]$

টর্কের তাৎপর্য (Significance of torque)

একটি অক্ষের সাপেক্ষে কোনো টর্ক থেকে বোঝা যায় কোনো একটি নির্দিষ্ট ভরের বিস্তৃত বস্তুকে কত সহজে ওই অক্ষটির সাপেক্ষে ঘুরানো যাবে। অর্থাৎ টর্ক যত বেশি হবে তত সহজে ওই টর্কের সাহায্যে কৌণিক বেগ পরিবর্তন করা সম্ভব হবে।

৪.২৪ টর্ক, জড়তার ভ্রামক ও কৌণিক ত্বরণ
Torque, moment of inertia and angular accelaration

আমরা জানি সরলরেখায় চলমান কোনো বস্তুতে ত্বরণ সৃষ্টির জন্যে বল প্রয়োগের প্রয়োজন। তেমনি নির্দিষ্ট অক্ষের চারদিকে ঘূর্ণায়মান কোনো বস্তুতে ত্বরণ সৃষ্টির জন্যে একটি দ্বন্দ্বের প্রয়োজন হয়। এই দ্বন্দ্বের ভ্রামককে টর্ক বলে।

ধরি একটি বস্তু একটি নির্দিষ্ট অক্ষ XY-এর চারদিকে ω সমকৌণিক বেগে ঘুরছে [চিত্র ৪.২৫]। এখন তার ওপর একটি যুগল প্রয়োগ করায় তার কৌণিক বেগ বৃদ্ধি পাবে অর্থাৎ বস্তুতে কৌণিক ত্বরণ সৃষ্টি হবে। বস্তুতে সৃষ্ট এই কৌণিক ত্বরণ তার প্রত্যেকটি কণার কৌণিক ত্বরণের সমান। কিন্তু ঘূর্ণাক্ষ হতে কণাগুলো বিভিন্ন দূরত্বে অবস্থান করে বিভিন্ন রৈখিক ত্বরণ লাভ করবে। ঘূর্ণাক্ষ হতে কণার দূরত্ব যত বেশি হবে রৈখিক ত্বরণের মানও তত বেশি হবে।

ধরি বস্তুটি m_1, m_2, m_3 ইত্যাদি ভরের কতকগুলো কণার সমন্বয়ে গঠিত এবং ঘূর্ণাক্ষ হতে কণাগুলোর দূরত্ব যথাক্রমে r_1, r_2, r_3 ইত্যাদি।

বর্ণনা অনুসারে, বস্তুটির প্রত্যেকটি কণার কৌণিক ত্বরণ, $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$

তা হলে m_1 ভরের বস্তু কণাটির রৈখিক ত্বরণ = $r_1 \frac{d\omega}{dt}$

$\therefore$ ওই কণার উপর প্রযুক্ত বল = ভর × রৈখিক ত্বরণ = $m_1 r_1 \frac{d\omega}{dt}$

∴ ঘূর্ণাক্ষের সাপেক্ষে কণাটির ওপর ক্রিয়ারত বলের ভ্রামক বা টর্ক τ = বল × ঘূর্ণাক্ষ হতে বস্তু কণার দূরত্ব $= m_1r_1\frac{d\omega}{dt}\times r_1 = m_1r_1^2\frac{d\omega}{dt}$

অনুরূপভাবে লেখা যায় $m_2, m_3, m_4, \ldots\ \ldots\ \ldots$ ইত্যাদি ভরের বস্তুকণার ওপর ক্রিয়ারত বলের ভ্রামক যথাক্রমে $m_2r_2^2\frac{d\omega}{dt}$, $m_3r_3^2\frac{d\omega}{dt}$, $m_4r_4^2\frac{d\omega}{dt}$ ইত্যাদি।

তা হলে উপরোক্ত ভ্রামকগুলোর সমষ্টিই উক্ত বস্তুর ওপর ক্রিয়ারত দ্বন্দ্বের ভ্রামক বা টর্ক,

$$\tau = m_1r_1^2\frac{d\omega}{dt} + m_2r_2^2\frac{d\omega}{dt} + m_3r_3^2\frac{d\omega}{dt} + m_4r_4^2\frac{d\omega}{dt} + \cdots\ \cdots\ \cdots$$

$$= (m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + m_3r_3^2 + \ldots)\frac{d\omega}{dt} = \frac{\mathrm{I}d\omega}{dt} = \mathrm{I}\alpha$$

$$\therefore \tau = \mathrm{I}\frac{d\omega}{dt} = \mathrm{I}\alpha \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (4.39)$$

বা, টর্ক = জড়তার ভ্রামক × কৌণিক ত্বরণ। কৌণিক ত্বরণের আবর্তনরত বস্তুকণার ওপর ক্রিয়ারত দ্বন্দ্বের টর্ক হবে ঘূর্ণাক্ষের সাপেক্ষে তার জড়তার ভ্রামক ও কৌণিক ত্বরণের গুণফলের সমান।

আবার $\frac{d\omega}{dt} = 1$ হলে, $\tau = \mathrm{I}$

∴ কোনো অক্ষের চারদিকে ঘূর্ণায়মান কোনো দৃঢ় বস্তুর ওপর যে টর্ক ক্রিয়া করলে তাতে একক কৌণিক ত্বরণের সৃষ্টি হয় তাকে ওই অক্ষের সাপেক্ষে তার জড়তার ভ্রামক বলে। সমীকরণ (4.39) টর্ক, জড়তার ভ্রামক এবং কৌণিক ত্বরণের মধ্যে সম্পর্ক নির্দেশ করে।

যাচাই কর : দেখাও যে কোনো বস্তুর ওপর ক্রিয়ারত টর্ক বস্তুটির কৌণিক ভরবেগের পরিবর্তনের হারের সমান।

আমরা জানি, কৌণিক ভরবেগ, $\vec{\mathrm{L}} = \vec{r} \times \vec{p}$

বা, $\vec{\mathrm{L}} = \vec{r} \times m\vec{v}$

$$\therefore \frac{d\vec{\mathrm{L}}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt}\times m\vec{v} + \vec{r}\times m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v}\times m\vec{v} + \vec{r}\times m\vec{a}$$

$$= \vec{v}\times m\vec{v} + \vec{r}\times\vec{\mathrm{F}} = \vec{r}\times\vec{\mathrm{F}} \quad [\because \vec{v}\times\vec{v} = 0]$$

অতএব, কোনো বস্তুর কৌণিক ভরবেগের পরিবর্তনের হার বস্তুটির ওপর ক্রিয়াশীল টর্কের সমান।

গাণিতিক উদাহরণ ৪.১২

১। একটি চাকার ভর 5 kg এবং কোনো অক্ষ সাপেক্ষে চক্রগতির ব্যাসার্ধ 0·2 m। এর জড়তার ভ্রামক কত ? চাকাটিতে 2 rad s⁻² কৌণিক ত্বরণ সৃষ্টি করতে কত মানের টর্ক প্রয়োগ করতে হবে ?

আমরা জানি,

$\mathrm{I} = \mathrm{MK}^2 = 5\times(0{\cdot}2)^2$

$= 5\times 0{\cdot}04$

$= 0{\cdot}2\ \mathrm{kg\,m^2}$

এখানে,
$\mathrm{M} = 5\ \mathrm{kg}$
$\mathrm{K} = 0{\cdot}2\ \mathrm{m}$
$\mathrm{I} = ?$

আবার,

$\tau = \mathrm{I}\alpha$

$= 0{\cdot}2\times 2$

$= 0{\cdot}4\ \mathrm{N\text{-}m}$

এখানে,
$\mathrm{I} = 0{\cdot}2\ \mathrm{kgm^2}$
$\alpha = 2\ \mathrm{rad\,s^{-2}}$
$\tau = ?$

২। একটি 8 kg ভরের চাকার চক্রগতির ব্যাসার্ধ 25 cm হলে এর জড়তার ভ্রামক কত হবে ? চাকাটিতে 3 rad/s² কৌণিক ত্বরণ সৃষ্টি করতে কত মানের টর্ক প্রয়োগ করতে হবে ? [BUET Admission Test, 2017-18]

আমরা জানি, জড়তার ভ্রামক

$$I = Mk^2$$
$$= 8 \times (0.25)^2$$
$$= 0.5\ \text{kgm}^2$$

$\therefore$ টর্ক, $\tau = I\alpha = 0.5 \times 3 = 1.5$ Nm

৩। একটি ধাতব গোলকের ভর 6 g। এটিকে 3 m দীর্ঘ একটি সুতার এক প্রান্তে বেঁধে প্রতি সেকেন্ডে 4 বার ঘুরানো হচ্ছে। এর কৌণিক ভরবেগ কত ?

আমরা জানি,

$$L = I\omega$$
$$= mr^2 \times \frac{2\pi N}{t}$$
$$= \frac{0.006 \times (3)^2 \times 2 \times 3.14 \times 4}{1}$$
$$= 1.356\ \text{kg m}^{-2}\text{s}^{-1}$$

এখানে,
গোলকের ভর, $m = 6$ g $= 0.006$ kg
সুতার দৈর্ঘ্য বা
বক্রপথের ব্যাসার্ধ, $r = 3$ m
প্রতি সেকেন্ডে ঘূর্ণন সংখ্যা, $N = 4$ বার
সময়, $t = 1$ sec
কৌণিক ভরবেগ, $L = ?$

৪। একটি চাকার ভর 5 kg এবং চক্রগতির ব্যাসার্ধ 25 cm। এর জড়তার ভ্রামক কত? চাকার কৌণিক ত্বরণ 4 rad s⁻² সৃষ্টি করতে কত মানের টর্ক প্রয়োগ করতে হবে ?

আমরা জানি,

$$I = MK^2$$
$$\therefore I = 5 \times (0.25)^2$$
$$= 0.3125\ \text{kg-m}^2$$

এখানে,
$M = 5$ kg
$K = 25$ cm $= 0.25$ m
$I = ?$

আবার, $\tau = I\alpha$

$$\therefore \tau = 0.3125 \times 4$$
$$= 1.25\ \text{N-m}$$

এখানে,
$I = 0.3125$ kg-m²
$\alpha = 4$ rads⁻²
$\tau = ?$

৫। 40 kg ভরের একটি বালক নাগরদোলায় চড়ে 20 m ব্যাসের বৃত্তাকার পথে 6 rpm কৌণিক বেগে ঘুরছে। বালকটির কৌণিক ভরবেগ নির্ণয় কর।

আমরা জানি,

$$L = I\omega = mr^2\omega$$
$$= 40 \times (10)^2 \times \frac{1}{5}\pi\ \text{kg m}^2\text{s}^{-1}$$
$$= 2.512 \times 10^3\ \text{kg m}^2\text{s}^{-1}$$

এখানে,
$\omega = \frac{6 \times 2\pi}{60} = \frac{1}{5}\pi$ rad s⁻¹
$m = 40$ kg
$r = \frac{d}{2} = \frac{20\ \text{m}}{2} = 10$ m

৬। মঙ্গল গ্রহ সূর্যকে কেন্দ্র করে 2.28×10^{11} m ব্যাসার্ধের বৃত্তাকার পথে ঘুরে ধরে নিয়ে এর কৌণিক ভরবেগ নির্ণয় কর। মঙ্গল গ্রহের ভর 6.46×10^{23} kg এবং আবর্তন কাল 5.94×10^7 s।

আমরা জানি, কৌণিক ভরবেগ,

$$L = I\omega = mr^2 \times \omega = mr^2 \times \frac{2\pi}{T}$$
$$= \frac{6.46 \times 10^{23} \times (2.28 \times 10^{11})^2 \times 2 \times 3.14}{5.94 \times 10^7}$$
$$= 3.55 \times 10^{39}\ \text{kgm}^2\text{s}^{-1}$$

এখানে,
ব্যাসার্ধ, $r = 2.28 \times 10^{11}$ m
ভর, $m = 6.46 \times 10^{23}$ kg
আবর্তন কাল, $T = 5.94 \times 10^7$ s
কৌণিক ভরবেগ, $L = ?$

৭। ব্যাসার্ধ ভেক্টর $\vec{r} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$ এবং বল ভেক্টর $\vec{F} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$ হলে টর্ক $\vec{\tau}$ নির্ণয় কর।

টর্ক, $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \hat{i}\,(6-4) - \hat{j}\,(4-4) + \hat{k}\,(4-6)$

$= 2\hat{i} - 0 - 2\hat{k} = 2\hat{i} - 2\hat{k}$

৮। একটি ঘূর্ণায়মান বস্তুর ভর 2 kg। ঘূর্ণন অক্ষ হতে এর দূরত্ব 1 m, বস্তুটি 5 rad s^{-1} কৌণিক বেগে ঘুরলে গতিশক্তি কত হবে ?

আমরা জানি,

$$E_k = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2} \times mr^2 \times \omega^2$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \times 1^2 \times (5)^2$$

$$= 25\ J$$

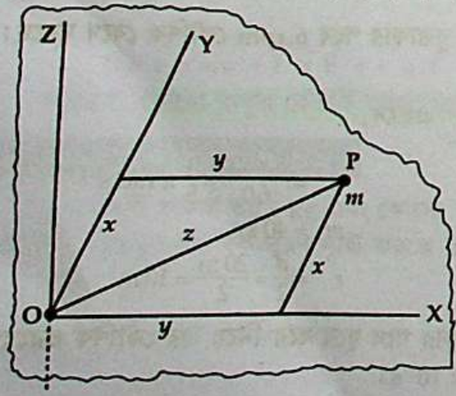
৪.২৫ জড়তার ভ্রামক সংক্রান্ত দুটি উপপাদ্য
Two theorems relating moment of inertia

কোনো একটি বিশেষ অক্ষের সাপেক্ষে দৃঢ় বস্তুর জড়তার ভ্রামক নির্ণয়ের দুটি সহজ উপপাদ্য আছে। উপপাদ্য দুটির একটিকে (১) লম্ব অক্ষসমূহের উপপাদ্য এবং অপরটিকে (২) সমান্তরাল অক্ষসমূহের উপপাদ্য বলে। নিম্নে পাত আকৃতির বস্তুর ক্ষেত্রে উপপাদ্য দুটি আলোচনা করা হলো।

৪.২৫.১ লম্ব অক্ষ উপপাদ্য
Perpendicular axes theorem

কোনো পাতলা সমতল পাতের তলে অবস্থিত দুটি পরস্পর লম্ব অক্ষের সাপেক্ষে পাতটির জড়তার ভ্রামকদ্বয়ের সমষ্টি ওই পাতে অবস্থিত দুই অক্ষের ছেদ বিন্দুতে অঙ্কিত লম্ব অক্ষ সাপেক্ষে পাতটির জড়তার ভ্রামকের সমান হবে।

ব্যাখ্যা : মনে করি কোনো সমতল পাতের ওপর অবস্থিত দুটি পরস্পর লম্ব অক্ষ OX এবং OY বরাবর এদের জড়তার ভ্রামক যথাক্রমে I_x ও I_y। ধরি ওই পাতে অবস্থিত দুই অক্ষের ছেদ বিন্দুতে অঙ্কিত লম্ব OZ বরাবর পাতের জড়তার ভ্রামক I_z। প্রমাণ করতে হবে যে, $I_x + I_y = I_z$



চিত্র ৪.৩১

অঙ্কন : একটি পাতলা সমতল পাত নিই। এই পাতের ওপর OX এবং OY দুটি পরস্পর লম্ব অঙ্কন করি [চিত্র ৪.৩১]।

এখন OX এবং OY অক্ষ দুটির ছেদ O-তে পাতের ওপর লম্ব টানি।

প্রমাণ : সমতল পাতের ওপর P একটি বিন্দু নিই যার ভুজ কোটি x, y এবং z। এখন P বিন্দুতে m ভরের একটি কণা বিবেচনা করি। OZ অক্ষ সাপেক্ষে কণাটির জড়তার ভ্রামক $= mz^2$।

$\therefore$ OZ অক্ষ সাপেক্ষে সমগ্র পাতের জড়তার ভ্রামক

$$I_z = \Sigma mz^2 = \Sigma m\,(x^2 + y^2)$$

$$= \Sigma mx^2 + \Sigma my^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad (4.40)$$

কিন্তু, $\Sigma my^2 = I_x$ এবং $\Sigma mx^2 = I_y$

অতএব সমীকরণ (4.40) হতে পাই

$$I_z = I_y + I_x$$

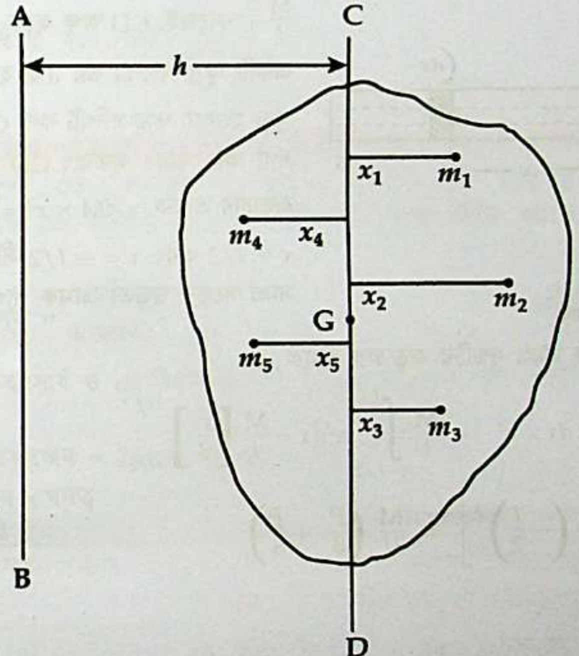
বা $$I_z = I_x + I_y \quad \ldots \quad \ldots \quad (4.41)$$

$\therefore$ উপপাদ্যটি প্রমাণিত হলো।

৪.২৫.২ সমান্তরাল অক্ষ উপপাদ্য
Parallel axes theorem

যে কোনো অক্ষের সাপেক্ষে কোনো সমতল পাতলা পাতের জড়তার ভ্রামক পাতটির ভারকেন্দ্রগামী তার সমান্তরাল অক্ষের সাপেক্ষে জড়তার ভ্রামক এবং পাতের ভর ও ওই দুই অক্ষের মধ্যবর্তী দূরত্বের বর্গের গুণফলের সমষ্টির সমান।

ব্যাখ্যা : ধরা যাক কাগজের তলে অবস্থিত AB কোনো একটি অক্ষ এবং CD তার সমান্তরাল আর একটি অক্ষ। CD অক্ষটি M ভরের পাতলা সমতল পাতের ভারকেন্দ্র G দিয়ে অতিক্রান্ত [চিত্র ৪.৩২]। যদি সমান্তরাল অক্ষদ্বয় AB ও CD-এর মধ্যবর্তী দূরত্ব h এবং AB ও CD-এর সাপেক্ষে পাতটির জড়তার ভ্রামক যথাক্রমে I ও I_G হয় তবে উপপাদ্য অনুসারে প্রমাণ করতে হবে যে, $I = I_G + Mh^2$



চিত্র ৪.৩২

প্রমাণ : ধরি পাতটি m_1, m_2, m_3 ইত্যাদি ভরের বস্তুকণার সমন্বয়ে গঠিত। CD অক্ষ হতে কণাগুলোর দূরত্ব যথাক্রমে x_1, x_2, x_3 ইত্যাদি। তা হলে AB অক্ষের সাপেক্ষে m_1 ভরের কণার জড়তার ভ্রামক

$$= m_1(x_1 + h)^2 = m_1x_1^2 + m_1h^2 + 2m_1x_1h$$

অনুরূপভাবে AB অক্ষের সাপেক্ষে m_2 ভরের কণার জড়তার ভ্রামক

$$= m_2x_2^2 + m_2h^2 + 2m_2x_2h \,;$$

m_3 ভরের কণার জড়তার ভ্রামক

$= m_3x_3^2 + m_3h^2 + 2m_3x_3h$ ইত্যাদি।

$\therefore$ AB অক্ষের সাপেক্ষে সমগ্র পাতের জড়তার ভ্রামক I হলো উপরোক্ত জড়তার ভ্রামকগুলোর সমষ্টির সমান।

$$\therefore\ I = m_1x_1^2 + m_1h^2 + 2m_1x_1h + m_2x_2^2 + m_2h^2 + 2m_2x_2h + m_3x_3^2 + m_3h^2 + 2m_3x_3h + \dots\ \dots$$

$$= \Sigma mx^2 + h^2\,\Sigma m + 2h\Sigma mx.$$

এখানে, Σmx = CD অক্ষের সাপেক্ষে সমগ্র পাতের ভর ভ্রামক। কিন্তু সমগ্র পাতের ওজন G বিন্দু দিয়ে CD রেখা বরাবর নিম্নমুখে ক্রিয়া করায় CD অক্ষের সাপেক্ষে পাতটির ভর ভ্রামক,

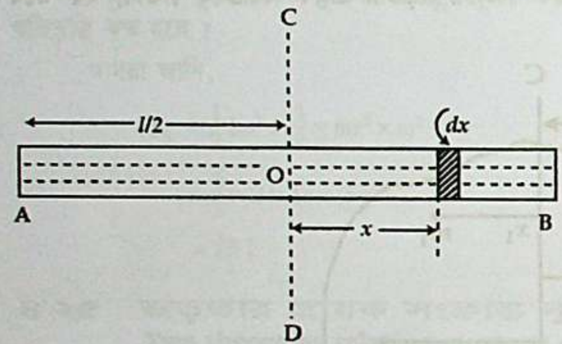
$\Sigma mx = 0$ আবার $\Sigma m = M$ ও $I_G = \Sigma mx^2$

$$\therefore\ I = I_G + Mh^2 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (4.42)$$

৪.২৬ কয়েকটি বিশেষ ক্ষেত্রে জড়তার ভ্রামক ও চক্রগতির ব্যাসার্ধ নির্ণয় Determination of moment of inertia and radius of gyration for some special cases

১। সরু ও সুষম দণ্ডের মধ্যবিন্দু দিয়ে ও তার দৈর্ঘ্যের অভিলম্বভাবে অতিক্রান্ত অক্ষের সাপেক্ষে ঘূর্ণায়মান ওই দণ্ডের জড়তার ভ্রামক

ধরি l দৈর্ঘ্য ও M ভরবিশিষ্ট একটি সুষম সরু দণ্ড AB-এর দৈর্ঘ্যের মধ্যবিন্দু O দিয়ে ও দৈর্ঘ্যের লম্বভাবে অতিক্রান্ত অক্ষ CD-এর চতুর্দিকে ঘুরছে [চিত্র ৪.৩৩] । এই অক্ষের সাপেক্ষে তার জড়তার ভ্রামক ও চক্রগতির ব্যাসার্ধ নির্ণয় করতে হবে।



চিত্র ৪.৩৩

দণ্ডটি সুষম হেতু তার প্রতি একক দৈর্ঘ্যের ভর = $\frac{M}{l}$ । কাজেই CD অক্ষ হতে x দূরে অবস্থিত dx দৈর্ঘ্যের একটি ক্ষুদ্র অংশের ভর dM হলে $dM = \frac{M}{l}dx$ । dx অংশটি ক্ষুদ্র হওয়ায় তার প্রতিটি কণা CD অক্ষ হতে x দূরে অবস্থিত গণ্য করা যায়। সুতরাং CD অক্ষের সাপেক্ষে dx অংশের জড়তার ভ্রামক $= dM \times x^2 = \frac{M}{l} \times dx \times x^2$ এবং একে $x = l/2$ এবং $x = -l/2$ সীমার মধ্যে সমাকলন করলে সমগ্র দণ্ডের জড়তা ভ্রামক পাওয়া যাবে।

$\therefore$ CD অক্ষের সাপেক্ষে সমগ্র দণ্ডটির জড়তার ভ্রামক,

$$I = \int_{-l/2}^{l/2}\left(\frac{M}{l}\right)\times dx\times x^2 = \frac{M}{l}\int_{-l/2}^{l/2}x^2dx = \frac{M}{l}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-l/2}^{l/2}$$

$$= \frac{M}{3l}\left[\left(\frac{l}{2}\right)^3 - \left(-\frac{l}{2}\right)^3\right] = \frac{M}{3l}\left(\frac{l^3}{8}+\frac{l^3}{8}\right)$$

$$\therefore \boxed{I = \frac{M}{12}l^2} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (4.43)$$

ধরি চক্রগতির ব্যাসার্ধ K

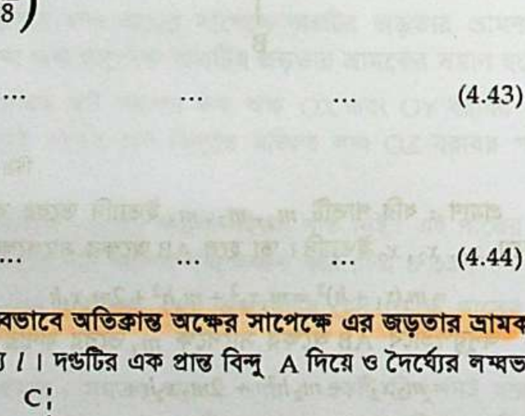
$$\therefore \quad MK^2 = \frac{M}{12}l^2$$

$$\therefore \quad K = \frac{l}{\sqrt{12}} = \frac{l}{2\sqrt{3}} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (4.44)$$

২। সরু সুষম দণ্ডের এক প্রান্ত দিয়ে ও এর দৈর্ঘ্যের লম্বভাবে অতিক্রান্ত অক্ষের সাপেক্ষে এর জড়তার ভ্রামক

ধরি AB একটি সরু ও সুষম দণ্ড। এর ভর M ও দৈর্ঘ্য l । দণ্ডটির এক প্রান্ত বিন্দু A দিয়ে ও দৈর্ঘ্যের লম্বভাবে অতিক্রান্ত CD-এর চারদিকে ঘুরছে [চিত্র ৪.৩৪]। এই CD অক্ষের সাপেক্ষে দণ্ডটির জড়তা ভ্রামক ও চক্রগতির ব্যাসার্ধ নির্ণয় করতে হবে।

বর্ণনা অনুসারে দণ্ডটি সুষম হওয়ায় এর প্রতি একক দৈর্ঘ্যের ভর $\frac{M}{l}$ । সুতরাং CD অক্ষ হতে x দূরে অবস্থিত দণ্ডটির dx দৈর্ঘ্যের একটি ক্ষুদ্র অংশের ভর $dM = \frac{M}{l}dx$ । অংশটি ক্ষুদ্র হেতু এর প্রতিটি কণা CD অক্ষ হতে x দূরে অবস্থিত গণ্য করা যায়।



চিত্র ৪.৩৪

$\therefore$ CD অক্ষের সাপেক্ষে দণ্ডটির এই ক্ষুদ্র অংশের জড়তার ভ্রামক $= \frac{M}{l}\times dx \times x^2$

এখন একে $x = 0$ ও $x = l$ এই সীমার মধ্যে সমাকলন করলে, CD অক্ষের সাপেক্ষে সমগ্র দণ্ডের জড়তার ভ্রামক পাওয়া যাবে।

$\therefore$ নির্ণেয় জড়তার ভ্রামক, $I = \int_{x=0}^{x=l} \left(\frac{M}{l}\right) \times dx \times x^2$

$$= \frac{M}{l}\int_{x=0}^{x=l} x^2 dx$$

$$= \frac{M}{l}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^l = \frac{M}{3l} \times l^3$$

$$\therefore I = \frac{1}{3}Ml^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (4.45)$$

এখন চক্রগতির ব্যাসার্ধ K হলে, $MK^2 = \frac{1}{3}Ml^2$

$$\therefore K = \frac{l}{\sqrt{3}} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (4.46)$$

৩। নিজ অক্ষের চতুর্দিকে ঘূর্ণায়মান একটি নিরেট চোঙের জড়তার ভ্রামক ও চক্রগতির ব্যাসার্ধ

ধরি একটি সুষম নিরেট চোঙ C-এর ভর M, দৈর্ঘ্য l ও ব্যাসার্ধ r [চিত্র ৪.৩৫]। এটি নিজ অক্ষ PQ-এর চতুর্দিকে ঘুরছে। PQ সাপেক্ষে এর জড়তার ভ্রামক ও চক্রগতির ব্যাসার্ধ নির্ণয় করতে হবে। বর্ণনা অনুসারে চোঙটির আয়তন = $\pi r^2 \times l$

চোঙের উপাদানের ঘনত্ব = $\frac{\text{ভর}}{\text{আয়তন}} = \frac{M}{\pi r^2 l}$

PQ-এর চতুর্দিকে x ব্যাসার্ধ ও dx বিস্তারবিশিষ্ট একটি ফাঁপা সমাক্ষীয় পাতলা চোঙ বিবেচনা করি।

এই পাতলা চোঙের প্রস্থচ্ছেদ = $2\pi x dx$, আয়তন = $2\pi x \times dx \times l$

এখন, ভর = আয়তন × ঘনত্ব

$$= 2\pi x \times dx \times l \times \frac{M}{\pi r^2 l}$$

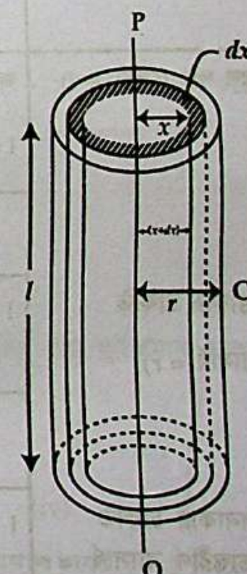
$$= \frac{2Mxdx}{r^2}$$

dx বিস্তারের এই চোঙটি পাতলা হেতু এর প্রতিটি কণা PQ হতে x দূরে বিবেচনা করা যায়। কাজেই PQ-এর সাপেক্ষে এই পাতলা চোঙের জড়তার ভ্রামক

$$= \frac{2Mxdx}{r^2} \times x^2 = \frac{2M}{r^2} x^3 dx$$

সমগ্র চোঙটিকে সমাক্ষীয় অনুরূপ অনেকগুলো পাতলা ফাঁপা চোঙের সমন্বয়ে গঠিত বিবেচনা করা যায়।

কাজেই $x = 0$ ও $x = r$ এই সীমার মধ্যে উপরোক্ত ফাঁপা চোঙের জড়তার ভ্রামককে সমাকলন করলে নিজ অক্ষ PQ-এর সাপেক্ষে সমগ্র চোঙটির জড়তার ভ্রামক I পাওয়া যাবে।



চিত্র ৪.৩৫

$$\therefore \quad I = \int_0^r \frac{2M}{r^2} x^3 dx = \frac{2M}{r^2}\int_0^r x^3 dx = \frac{2M}{r^2}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^r$$

$$= \frac{2M}{4r^2}\left[r^4 - 0\right]$$

$$\therefore \quad I = \frac{1}{2}Mr^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (4.47)$$

এক্ষেত্রে চক্রগতির ব্যাসার্ধ K হলে,

$$MK^2 = \frac{1}{2}Mr^2$$

$$\therefore K = \frac{r}{\sqrt{2}} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (4.48)$$

কাজ : (i) M ভরের এবং l দৈর্ঘ্যের সরু ও সুষম দণ্ডের দৈর্ঘ্যের মধ্য বিন্দু দিয়ে, (ii) এক প্রান্ত দিয়ে গমনকারী অক্ষের সাপেক্ষে (iii) M ভরের এবং r ব্যাসার্ধের পাতলা চাকতির কেন্দ্র দিয়ে পৃষ্ঠের অভিলম্বভাবে গমনকারী এবং (iv) M ভর ও r ব্যাসার্ধের নিরেট সিলিন্ডারের নিজ অক্ষের সাপেক্ষে জড়তার ভ্রামক ও চক্রগতির ব্যাসার্ধ কত ?

(i) সরু ও সুষম দণ্ডের মধ্য বিন্দুর ঘূর্ণায়মানের জন্য জড়তার ভ্রামক $\frac{Ml^2}{12}$, জড়তার ভ্রামক $\frac{l}{\sqrt{12}}$;

(ii) সরু ও সুষম দণ্ডের প্রান্ত বিন্দু দিয়ে ঘূর্ণায়মানের জন্য জড়তার ভ্রামক $\frac{Ml^2}{3}$;

(iii) M ভরের ও r ব্যাসার্ধের পাতলা চাকতির জন্য জড়তার ভ্রামক $\frac{1}{2}Mr^2$, চক্রগতির ব্যাসার্ধ $\frac{r}{\sqrt{2}}$;

(iv) M ভরের ও r ব্যাসার্ধের নিরেট সিলিন্ডারের জড়তার ভ্রামক $\frac{1}{2}Mr^2$, চক্রগতির ব্যাসার্ধ $\frac{r}{\sqrt{2}}$.

৪.২৭ ঘূর্ণাক্ষের অবস্থান অনুযায়ী জড়তার ভ্রামক ও চক্রগতির ব্যাসার্ধের সমীকরণ

Equations of moment of inertia and radius of gyration with respect to location of rotational axes

বস্তু	ঘূর্ণাক্ষের অবস্থান অনুযায়ী জড়তার ভ্রামক ও চক্রগতির ব্যাসার্ধ			
	ভরকেন্দ্রগামী লম্ব অক্ষ সাপেক্ষে		প্রান্তবিন্দুগামী লম্ব অক্ষ সাপেক্ষে	
সরল দণ্ড (দৈর্ঘ্য = l)	জড়তা ভ্রামক $I = \frac{l}{12}ml^2$	চক্রগতির ব্যাসার্ধ $K = \frac{l}{2\sqrt{3}}$	জড়তা ভ্রামক $I = \frac{1}{3}ml^2$	চক্রগতির ব্যাসার্ধ $K = \frac{l}{\sqrt{3}}$
	ভরকেন্দ্রগামী লম্ব অক্ষ সাপেক্ষে		কোনো ব্যাস সাপেক্ষে	
বৃত্তাকার চাকতি (ব্যাসার্ধ = r)	$I = \frac{1}{2}mr^2$	$K = \frac{r}{\sqrt{2}}$	$I = \frac{1}{4}mr^2$	$K = \frac{r}{2}$
	ভরকেন্দ্রগামী লম্ব অক্ষ সাপেক্ষে		কোনো ব্যাস সাপেক্ষে	
বেলনাকার চাকতি (অভ্যন্তরীণ ব্যাসার্ধ = r বহির্ব্যাসার্ধ = R)	$I = \frac{1}{2}m(R^2 + r^2)$	$K = \sqrt{\frac{R^2 + r^2}{2}}$	$I = \frac{1}{4}(R^2 + r^2)$	$K = \frac{(R^2 + r^2)^{\frac{1}{2}}}{2}$
	ভরকেন্দ্রগামী লম্ব অক্ষ সাপেক্ষে		প্রস্থের সঙ্গে সমান্তরাল ভরকেন্দ্রগামী অক্ষ সাপেক্ষে	
আয়তাকার পাত (দৈর্ঘ্য = l, প্রস্থ = b)	$I = \frac{1}{12}(l^2 + b^2)$	$K = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{l^2 + b^2}{3}}$	$I = \frac{1}{12}ml^2$	$K = \frac{l}{2\sqrt{3}}$
	চোঙের অক্ষ সাপেক্ষে		দৈর্ঘ্যের সাথে লম্ব ভরকেন্দ্রগামী অক্ষ সাপেক্ষে	
নিরেট চোঙ (দৈর্ঘ্য = l, ব্যাসার্ধ = r)	$I = \frac{1}{2}mr^2$	$K = \frac{r}{\sqrt{2}}$	$I = m\left(\frac{r^2}{4} + \frac{l^2}{12}\right)$	$K = \sqrt{\frac{r^2}{4} + \frac{l^2}{12}}$

বস্তু	ঘূর্ণাক্ষের অবস্থান অনুযায়ী জড়তার ভ্রামক ও চক্রগতির ব্যাসার্ধ			
	ভরকেন্দ্রগামী লম্ব অক্ষ সাপেক্ষে		কোনো ব্যাস সাপেক্ষে	
বৃত্তাকার রিং (ব্যাসার্ধ = r)	$I = mr^2$	$K = r$	$I = \frac{1}{2} mr^2$	$K = \frac{r}{\sqrt{2}}$
	কোনো ব্যাস সাপেক্ষে		কোনো স্পর্শক সাপেক্ষে	
পাতলা গোলীয় খোলক (ব্যাসার্ধ = r)	$I = \frac{2}{3} mr^2$	$K = \sqrt{\frac{2}{3}}\, r$	$I = \frac{5}{3} mr^2$	$K = \sqrt{\frac{5}{3}}\, r$

৪.২৮ ব্যবহারিক
Experimental

পরীক্ষণের নাম : পিরিয়ড : ২	একটি ফ্লাই হুইলের জড়তার ভ্রামক নির্ণয় Determination of moment of inertia of a fly wheel

তত্ত্ব : মনে করি একটি চাকার কৌণিক বেগ ω এর ব্যাসার্ধ r হলে বস্তুটির রৈখিক বেগ $v = \omega r$। যদি চাকার জড়তার ভ্রামক I হয়, এবং চাকাটি অক্ষ দণ্ডের সাপেক্ষে ঘুরতে থাকলে তার

ঘূর্ণন গতিশক্তি, $E = \frac{1}{2} I\omega^2$ ... ... (i)

চাকাটির প্রতি ঘূর্ণনের জন্য ঘর্ষণের বিরুদ্ধে W পরিমাণ কাজ হয়। m ভরের বস্তু ভূমিতে পড়ার পূর্বে চক্রের ঘূর্ণন সংখ্যা n_1 হলে মোট কাজের পরিমাণ $= Wn_1$। m ভরের বস্তুটি h উচ্চতা হতে পড়লে তার

স্থিতিশক্তি $= mgh$ ... ... (ii)

আমরা জানি অক্ষ দণ্ডের স্থিতি = অক্ষ দণ্ডের গতিশক্তি + চাকার ঘূর্ণন গতিশক্তি + চাকার মোট কাজের পরিমাণ

বা, $mgh = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} I\omega^2 + Wn_1$

বা, $mgh = \frac{1}{2} m\,\omega^2 r^2 + \frac{1}{2} I\omega^2 + Wn_1$ ... ... (iii)

অক্ষ দণ্ডের সাথে যুক্ত সুতার প্রান্তে m ভরের বস্তুটি অক্ষদণ্ড হতে বিচ্ছিন্ন হবার পর ঘূর্ণায়মান চাকাটি n_2 বার ঘুরার পর থেমে গেলে, ঘর্ষণের বিরুদ্ধে ব্যয়িত কাজ $= Wn_2$

$\therefore\ Wn_2 = \frac{1}{2} I\omega^2$

বা, $W = \frac{I\omega^2}{2n_2}$ ... ... (iv)

সমীকরণ (iii)-এ W এর মান বসিয়ে পাই,

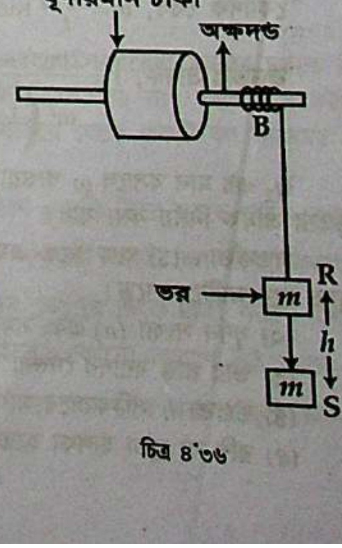
$$mgh = \frac{1}{2} m\omega^2 r^2 + \frac{1}{2} I\omega^2 + \frac{1}{2}\left(I\frac{\omega^2}{n_2}\right) \times n_1$$

বা, $mgh = \frac{1}{2} m\omega^2 r^2 + \frac{1}{2} I\omega^2 \left(1 + \frac{n_1}{n_2}\right)$

বা, $2mgh = m\omega^2 r^2 + I\omega^2 \left(1 + \frac{n_1}{n_2}\right)$

বা, $I\omega^2 \left(1 + \frac{n_1}{n_2}\right) = 2mgh - m\omega^2 r^2$

$$\therefore\ I = \frac{2mgh - m\omega^2 r^2}{\omega^2 \left(1 + \frac{n_1}{n_2}\right)} \quad \ldots \ldots \quad (v)$$



চিত্র ৪.৩৬

যন্ত্রপাতি : একটি লোহার অক্ষ দণ্ড, ভারী চাকা, কিছু রশি, একটি ভর, স্টপওয়াচ, মিটার স্কেল, স্লাইড ক্যালিপার্স।

যন্ত্রের বর্ণনা : ঘূর্ণায়মান একটি ভারী চাকা একটি অক্ষদণ্ড B-এর ওপর সুতার পাক দিয়ে অক্ষদণ্ডের সাথে এক প্রান্তে বেঁধে অন্য প্রান্তে m ভরের বস্তুকে বেঁধে চাকাকে ঘুরানো যায়।

পরীক্ষা পদ্ধতি : (১) প্রথমে স্লাইড ক্যালিপার্সের সাহায্যে চাকার অক্ষদণ্ডের ব্যাসার্ধ নির্ণয় করা হয়।

(২) এরপর ঘূর্ণন সংখ্যা নির্ণয়ের জন্য অক্ষদণ্ডের ওপর চক দিয়ে দাগ দিয়ে চাকা ঘুরিয়ে অক্ষদণ্ডের ওপর সুতাকে প্যাচানো হয় এবং সুতার অপর প্রান্তে ভর বেঁধে R অবস্থান থেকে ছেড়ে দিলে চাকাটি কয়েক বার ঘুরার পর সুতাসহ ভরটি S অবস্থানে পতিত হবে। এই অবস্থায় ভর S বিন্দু স্পর্শ করতে চাকাটি কত বার ঘুরল তার সংখ্যা n_1 এবং সময় নির্ণয় করতে হয়।

এখন সুতাকে পুনরায় অক্ষ দণ্ডের ওপর প্যাচ দিয়ে সুতার অপর প্রান্তে ভর বেঁধে R অবস্থানে এনে ভরকে নিচে নামতে দিতে হবে যে সময়ে ভরটি মাটি স্পর্শ করে সেই মুহূর্তে স্টপ ওয়াচ চালু করতে হবে। অক্ষ দণ্ডটি স্থির অবস্থায় আসার সঙ্গে সঙ্গে স্টপ ওয়াচ বন্ধ করা হয়। মোট সময় এবং চাকাটি কত বার ঘুরে স্থির হলো অর্থাৎ ঘূর্ণন সংখ্যা (n_2) গণনা করা হয়।

ছক–১ : অক্ষদণ্ড (B) এর ব্যাসার্ধ (r) নির্ণয়

পর্যবেক্ষণ সংখ্যা	প্রধান স্কেল পাঠ সেমি m	ভার্নিয়ার পাঠ সংখ্যা n	ভার্নিয়ার ধ্রুবক সেমি c	ভার্নিয়ার স্কেল পাঠ সেমি $F = c \times n$	মোট পাঠ সেমি $D = (m + F)$	গড় ব্যাস D সেমি	ব্যাসার্ধ $r = \frac{D}{2}$ সেমি
1							
2							
3							

ছক–২ : সময় ও ঘূর্ণন সংখ্যা নির্ণয়

পর্যবেক্ষণ	ঘূর্ণায়মান চক্র A-এর ঘূর্ণন সংখ্যা n_2	ঘূর্ণনকাল t sec	গড় ঘূর্ণন সংখ্যা n_2	গড় ঘূর্ণন সংখ্যার গড় সময় t sec
1				
2				
3				

হিসাব ও গণনা : ঘূর্ণন অক্ষটি n_2 বার ঘুরতে যদি t সময় নেয় তাহলে গড় কৌণিক বেগ, $\omega_2 = \frac{2\pi n_2}{t}$

দণ্ডটি ω কৌণিক বেগ হতে সমমন্দনে শূন্য বেগ লাভ করে ফলে তার গড় কৌণিক বেগ,

$$\omega_2 = \frac{\omega + 0}{2} = \frac{\omega}{2} \qquad \text{বা, } \frac{2\pi n_2}{t} r = \frac{\omega}{2}$$

কৌণিক বেগ, $\omega = \frac{4\pi n_2}{t}$ rad s^{-1}

$$\text{জড়তার ভ্রামক, } I = \frac{2mgh - m\omega^2 r^2}{\omega^2\left(1 + \frac{n_1}{n_2}\right)} = \ldots\ldots g\text{-cm}^2 = \ldots\ldots\ldots \text{kg-m}^2$$

n_2 এর মান বসালে ω পাওয়া যায়। m, ω, r, h, n_1 ও n_2 এবং g এর মান (v) নং সমীকরণে বসিয়ে ভারী চাকার জড়তার ভ্রামক নির্ণয় করা যায়।

সতর্কতা : (১) অক্ষ দণ্ডে এমনভাবে সুতা বাঁধতে হবে যাতে চাকা ঘুরার পর পাক খুলতে খুলতে অক্ষ দণ্ড থেকে বিচ্যুত হয়ে মাটিতে পড়ে।

(২) ঘূর্ণন সংখ্যা (n) এবং সময় (t) সঠিকভাবে নির্ণয় করতে হবে।

(৩) ভার প্রান্ত বরাবর দেওয়া দাগ দিয়ে ওই স্থান হতে উচ্চতা h নির্ণয় করতে হবে।

(৪) উচ্চতা h সঠিকভাবে মাপা উচিত।

(৫) রশি বা সুতা হালকা হতে হবে এবং দণ্ডের উপর প্যাঁচ সমভাবে হতে হবে।

৪·২৯ কৌণিক গতির জন্য নিউটনের সূত্র
Newton's laws for angular motion

রৈখিক গতির ক্ষেত্রে নিউটনের গতিসূত্রগুলো পূর্বের অধ্যায়ে আলোচনা করা হয়েছে। বস্তুর কৌণিক গতির ক্ষেত্রেও নিউটনের গতিসূত্রগুলো ভিন্নরূপে প্রযোজ্য। নিম্নে সূত্রগুলো বিবৃত ও ব্যাখ্যা করা হলো।

(১) প্রথম সূত্র : কোনো বস্তুর ওপর টর্ক ক্রিয়াশীল না হলে স্থির বস্তু স্থির অবস্থানে এবং ঘূর্ণনরত বস্তু সমকৌণিক বেগে ঘুরতে থাকবে।

ব্যাখ্যা : সূত্রানুযায়ী বাহ্যিক টর্কের ক্রিয়াতেই কেবলমাত্র বস্তুর কৌণিক বেগের তথা কৌণিক ভরবেগের পরিবর্তন সম্ভব। টর্কের ক্রিয়া ছাড়া বস্তুর কৌণিক বেগ হবে সমকৌণিক বেগ। আর বস্তু আপনা হতেই তার কৌণিক ভরবেগের ওপর প্রভাব ফেলতে পারে না। কৌণিক ভরবেগের পরিবর্তনকারীই হচ্ছে টর্ক। সুতরাং, বস্তুর ওপর টর্কের লব্ধি শূন্য হলে ওই বস্তুর কৌণিক ত্বরণও শূন্য হবে।

(২) দ্বিতীয় সূত্র : ঘূর্ণনরত কোনো বস্তুর কৌণিক ভরবেগের পরিবর্তনের হার ওই বস্তুর ওপর ক্রিয়াশীল টর্কের সমানুপাতিক এবং টর্ক যে দিকে ক্রিয়া করে কৌণিক ভরবেগের পরিবর্তনও ওই দিকে ঘটে।

ব্যাখ্যা : সূত্রানুযায়ী কৌণিক ভরবেগ $L = I\omega$ -এর পরিবর্তনের হার $\frac{dL}{dt}$ প্রযুক্ত টর্ক τ-এর সমানুপাতিক।

অর্থাৎ, $\tau \propto \frac{dL}{dt} \propto I\frac{d\omega}{dt}$

$\propto I\alpha$

বা, $\tau = KI\alpha$

এখানে K একটি সমানুপাতিক ধ্রুবক। এস. আই. এককে $K = 1$

$$\therefore \ \vec{\tau} = I\vec{\alpha} \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (4.49)$$

টর্ক τ-এর অভিমুখেই কৌণিক ভরবেগের পরিবর্তন dL সংঘটিত হবে।

বর্ণনা অনুযায়ী কৌণিক ত্বরণের উৎসই টর্ক।

তৃতীয় সূত্র : প্রত্যেক ক্রিয়ামূলক টর্কের একটি সমান ও বিপরীত প্রতিক্রিয়ামূলক টর্ক আছে।

ব্যাখ্যা : বস্তু A অপর একটি বস্তু B-এর উপর $\vec{\tau}_{12}$ টর্ক প্রয়োগ করলে B বস্তুও A-এর ওপর সমান ও বিপরীত-মুখী টর্ক $\vec{\tau}_{21}$ প্রয়োগ করবে। এখানে A কর্তৃক B-এর উপর প্রযুক্ত টর্ক $\vec{\tau}_{12}$ ক্রিয়ামূলক টর্ক ও B কর্তৃক A-এর ওপর প্রযুক্ত টর্ক $\vec{\tau}_{21}$ হচ্ছে প্রতিক্রিয়ামূলক টর্ক।

$$\therefore \ \vec{\tau}_{12} = -\vec{\tau}_{21} \text{ ও } \tau_{12} = \tau_{21}$$

প্রতিক্রিয়ামূলক টর্কের দিক ক্রিয়ামূলক টর্কের বিপরীতমুখি, তাই ঋণাত্মক চিহ্ন ব্যবহার করা হয়েছে।

৪·৩০ কেন্দ্রমুখি বল ও কেন্দ্রবিমুখি বল
Centripetal force and centrifugal force

৪·৩০·১ কেন্দ্রমুখি বল
Centripetal force

নিউটনের প্রথম সূত্র অনুযায়ী গতি জড়তার জন্য সচল বস্তু সব সময় সমবেগে সরলরেখা বরাবর চলতে চায়। কাজেই বাইরে থেকে কোনো বল ক্রিয়া না করলে বস্তুর গতির অভিমুখ আপনা আপনি পাল্টায় না। বৃত্তপথে আবর্তনরত বস্তুর গতির অভিমুখ প্রতি মুহূর্তে পাল্টে যায়; সুতরাং ওই বস্তুর উপর নিশ্চয়ই বাইরে থেকে একটি বল সবসময় ক্রিয়া করে।

আগেই আমরা দেখেছি যে, m ভরের কোনো বস্তু যখন r ব্যাসার্ধের বৃত্তপথে v দ্রুতি নিয়ে ঘুরতে থাকে তখন ওই বস্তুর ওপর সবসময় কেন্দ্রাভিমুখী ত্বরণ $\frac{v^2}{r}$ ক্রিয়া করে। নিউটনের দ্বিতীয় সূত্র অনুযায়ী একটি বল ক্রিয়া করায় এই ত্বরণ সৃষ্টি হচ্ছে। স্পষ্টত এই বলও কেন্দ্রাভিমুখী হবে অর্থাৎ ব্যাসার্ধ বরাবর বৃত্তের কেন্দ্রের দিকে ক্রিয়া করবে এবং এর মান বস্তুর ভর ও অভিকেন্দ্র ত্বরণের গুণফলের সমান অর্থাৎ $\frac{mv^2}{r}$ -এর সমান হবে। কোনো কারণে এই বলের ক্রিয়া বন্ধ হলে বস্তুটিকে বৃত্তপথে ঘোরাবার জন্য কোনো বল থাকবে না। তখন বস্তুটি বৃত্তের স্পর্শক বরাবর ছুটে যাবে এবং সমবেগে সরলরেখায় চলতে থাকবে।

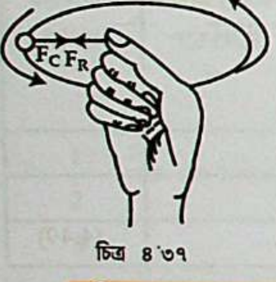
সংজ্ঞা : যে বলের ক্রিয়ায় কোনো বস্তু সমদ্রুতিতে বৃত্তপথে চলতে থাকে এবং যে বল সবসময় বস্তুর গতিপথের সঙ্গে লম্বভাবে ভেতরের দিকে অর্থাৎ বৃত্তের কেন্দ্রাভিমুখে ক্রিয়া করে তাকে কেন্দ্রমুখি বা অভিকেন্দ্র বল (Centripetal force) বলা হয়।

m ভরের বস্তু r ব্যাসার্ধের বৃত্তপথে সমদ্রুতি v নিয়ে চলতে থাকলে অভিকেন্দ্র বলের মান $\frac{mv^2}{r}$ হয়। কৌণিক বেগে প্রকাশ করলে অভিকেন্দ্র বলের মান হয় $m\omega^2 r$.

কেন্দ্রমুখি বা অভিকেন্দ্র বল একটি কার্যহীন বল

অভিকেন্দ্র বল সব সময় গতিপথের লম্বদিকে ক্রিয়া করায় ওই বলের অভিমুখে বস্তুর কোনো সরণ হয় না। সুতরাং অভিকেন্দ্র বল কোনো কাজ করে না। এই কারণে অভিকেন্দ্র বলকে কার্যহীন বল (no-work force) বলে।

কেন্দ্রবিমুখি প্রতিক্রিয়া : বৃত্তপথে আবর্তনরত বস্তুর ওপর ক্রিয়াশীল অভিকেন্দ্র বল বাইরে থেকে প্রযুক্ত হয়। বাইরে থেকে যে বস্তু ওই বল প্রয়োগ করে তার ওপর প্রথম বস্তুটি নিউটনের তৃতীয় সূত্রানুযায়ী সমান ও বিপরীতমুখি বল প্রয়োগ করে। স্পষ্টত এই প্রতিক্রিয়া বল বৃত্তের কেন্দ্র থেকে ব্যাসার্ধ বরাবর বাইরের দিকে ক্রিয়া করে। একে কেন্দ্রবিমুখি প্রতিক্রিয়া (centrifugal reaction) বলে।



চিত্র ৪.৩৭

মনে কর, একটি পাথরের টুকরাকে সুতোয় বেঁধে বৃত্তাকার পথে ঘোরানো হচ্ছে [চিত্র ৪.৩৭]। পাথরটির উপর সবসময় সুতোর মাধ্যমে অভিকেন্দ্র বল F_C ক্রিয়া করছে। এখানে সুতোর টানই হলো প্রয়োজনীয় অভিকেন্দ্র বল। সুতোটি হঠাৎ ছিঁড়ে গেলে অভিকেন্দ্র বল F_C-এর ক্রিয়া বন্ধ হয়ে যায়; সঙ্গে সঙ্গে পাথরটি বৃত্তের স্পর্শক বরাবর সরলরেখায় সমবেগে ছুটে যায়। বৃত্তাকার পথে ঘুরবার সময় পাথরটি হাতের উপর সমান ও বিপরীতমুখি অপকেন্দ্র প্রতিক্রিয়া F_R প্রয়োগ করে; ফলে হাতের উপর কেন্দ্র থেকে বাইরের দিকে একটি টান অনুভূত হয়। অন্যান্য ক্রিয়া-প্রতিক্রিয়ার মতো এখানেও F_C এবং F_R একই বস্তুর উপর ক্রিয়া করে না; দুটি পৃথক বস্তু যেমন, যথাক্রমে পাথর খণ্ড ও হাতের উপর ক্রিয়া করে। সুতো ছিঁড়ে গেলে দুটি বলই একসঙ্গে লোপ পায়।

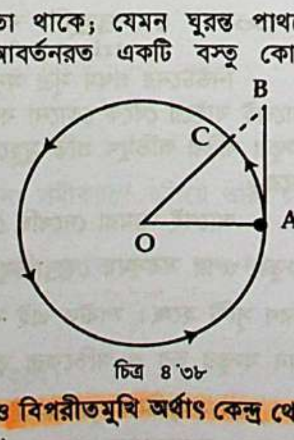
অভিকেন্দ্র বলের আরও অনেক উদাহরণ দেয়া যায়। সৌর জগতের প্রতিটি গ্রহ সূর্যের চারদিকে আবর্তন করে। সূর্য ঐ সব গ্রহের ওপর যে মহাকর্ষীয় আকর্ষণ প্রয়োগ করে, তা গ্রহগুলির উপর অভিকেন্দ্র বল রূপে ক্রিয়া করে।

নিজে কর : বৃত্তাকার পথে ঘূর্ণনশীল বস্তুর কেন্দ্রমুখি বল ব্যাসার্ধের পরিবর্তনের সাথে পরিবর্তিত হয়—ব্যাখ্যা কর।

৪.৩০.২ কেন্দ্রবিমুখি বল বা অপকেন্দ্র বল
Centrifugal force

আগেই আমরা দেখেছি যে বৃত্তপথে আবর্তনরত প্রতিটি বস্তুর ওপর সবসময় বৃত্তের কেন্দ্রমুখি একটি বল অর্থাৎ অভিকেন্দ্র বল ক্রিয়া করে। পৃথিবী সূর্যকে প্রদক্ষিণ করে। এখানে পৃথিবীর ওপর সূর্যের মহাকর্ষীয় আকর্ষণ বল হলো অভিকেন্দ্র বল। স্বাভাবিকভাবে প্রশ্ন উঠতে পারে— অভিকেন্দ্র বল কোন বলের দ্বারা প্রশমিত হয় ? কোন বাধার জন্য পৃথিবী সোজা সূর্যের দিকে ছুটে যায় না ? আপাতদৃষ্টিতে মনে হয় যে সূর্যের আকর্ষণের সমান ও বিপরীতমুখি আরেকটি বল পৃথিবীর ওপর ক্রিয়া করছে। **এই আপাত প্রতীয়মান বলকে কেন্দ্রবিমুখি বল বা অপকেন্দ্র বল (centrifugal force) বলা হয়।** স্পষ্টত অপকেন্দ্র বল অভিকেন্দ্র বলের সমান ও বিপরীতমুখি। কিন্তু মনে রাখতে হবে যে, অপকেন্দ্র বলের কোনো বাস্তব অস্তিত্ব নেই। তাই প্রকৃতপক্ষে অভিকেন্দ্র বল কোনো বাস্তব বলের (real force) দ্বারা প্রতিমিত হচ্ছে না। অভিকেন্দ্র বা অপকেন্দ্র বল একটি অলীক বল।

বৃত্তপথে আবর্তনরত সব বস্তুরই বৃত্তের স্পর্শক বরাবর ছুটে যাওয়ার প্রবণতা থাকে; যেমন ঘুরন্ত পাথরের উদাহরণে সুতো ছিঁড়ে গেলে পাথরটি স্পর্শক বরাবর ছুটে যায়। মনে করি, বৃত্তপথে আবর্তনরত একটি বস্তু কোনো মুহূর্তে A বিন্দুতে অবস্থান করছে [চিত্র ৪.৩৮]। যদি বস্তুর ওপর বৃত্তের কেন্দ্র O এর দিকে কোনো অভিকেন্দ্র বল ক্রিয়া না করত, তাহলে বস্তুটি অল্প সময় পর স্পর্শক বরাবর অন্য কোনো বিন্দু B-তে পৌঁছত। কিন্তু অভিকেন্দ্র বল সবসময় ক্রিয়া করে বলে বস্তুটি O কেন্দ্রের দিকে কিছুটা এগিয়ে আসে এবং অবশেষে B-এর বদলে বৃত্তপথের আরেকটি বিন্দু C-তে পৌঁছায়। অর্থাৎ অভিকেন্দ্র বলের প্রভাবেই প্রতিমুহূর্তে বস্তুটি বৃত্তপথে ঘুরতে বাধ্য হয়। সুতরাং বস্তুর ঘূর্ণন গতিতে অভিকেন্দ্র বলের ক্রিয়া সবসময় বজায় থাকে। কাজেই অভিকেন্দ্র বল কোনো বাস্তব বল দ্বারা প্রতিমিত হয় না। এজন্য অভিকেন্দ্র বলের বিপরীত দিকে ক্রিয়ারত অপকেন্দ্র বলের উপস্থিতিকে আপাত সত্য বলে ধরা হয়। তাই একে অলীক বল (pseudo force) বলা হয়।



চিত্র ৪.৩৮

সংজ্ঞা : সমদ্রুতিতে বৃত্তপথে আবর্তনরত বস্তুর ওপর অভিকেন্দ্র বলের সমান ও বিপরীতমুখি অর্থাৎ কেন্দ্র থেকে বাইরের দিকে একটি অলীক বল ক্রিয়া করে। একে কেন্দ্রবিমুখি বা অপকেন্দ্র বল বলে।

৪·৩১ কেন্দ্রমুখি এবং কেন্দ্রবিমুখি বলের ব্যবহার
Applications of centripetal and centrifugal forces

ব্যবহারিক দৃষ্টান্ত
Practical examples

১। রাস্তার ব্যাঙ্কিং (Banking of roads) :

(ক) অনুভূমিক রাস্তায় গাড়ির বাঁক নেয়া : মনে করি, অনুভূমিক রাস্তার মোড়ে একটি গাড়ি বাঁক নিচ্ছে। এখানে গাড়ির চাকা এবং রাস্তার মধ্যে ঘর্ষণ বল বাঁক নেয়ার জন্য প্রয়োজনীয় অভিকেন্দ্র বল সরবরাহ করে। এই ঘর্ষণ স্থিতি ঘর্ষণ এবং স্বনিয়ন্ত্রক। বাঁক নেয়ার সময় গাড়ির চাকাগুলি বাইরের দিকে ছিটকে যেতে চায়। ঘর্ষণ বল রাস্তার বাঁকের কেন্দ্রাভিমুখে ক্রিয়া করে ফলে গাড়ি ছিটকে যাওয়ার প্রবণতাকে বাধা দেয়। গাড়িটি খুব দ্রুত বেগে চলতে চলতে বাঁক নিলে প্রয়োজনীয় অভিকেন্দ্র বলের মানও খুব বেশি হয়। কিন্তু ঘর্ষণ বলের মান একটি নির্দিষ্ট সীমার বেশি হতে পারে না। তাই গাড়ি খুব দ্রুতগতিতে বাঁক নিলে ঘর্ষণ বল প্রয়োজনীয় অভিকেন্দ্র বল সরবরাহ করতে পারে না। ফলে গাড়িটি রাস্তা থেকে ছিটকে যায়।

মনে করি, m ভরের একটি গাড়ি v দ্রুতি নিয়ে r ব্যাসার্ধের একটি বৃত্তপথে বাঁক নিচ্ছে। গাড়ির চাকা এবং রাস্তার ক্রিয়াশীল মোট ঘর্ষণ বল F হলে গাড়িটি নিরাপদে বাঁক নেয়ার শর্ত হবে

$$F = \frac{mv^2}{r}$$

F-এর মান যত বেশি হবে গাড়িটি তত বেশি বেগে বাঁক নিতে পারবে। কিন্তু F-এর সর্বোচ্চ মান হলো μmg ; মানে μ হলো গাড়ির চাকা এবং রাস্তার মধ্যে স্থিতি ঘর্ষণ গুণাঙ্ক। অর্থাৎ, $F \le \mu mg$.

সুতরাং, গাড়িটি নিরাপদে বাঁক নেয়ার শর্ত হলো

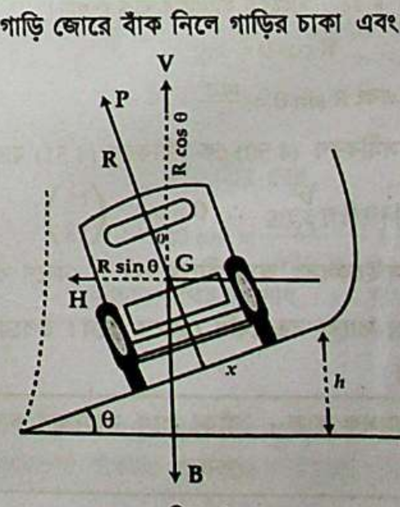
$$\frac{mv^2}{r} \le \mu mg$$

বা, $v^2 \le \mu rg$

বা, $v \le (\mu rg)^{1/2}$

গাড়ির দ্রুতি এই মান থেকে অর্থাৎ $(\mu rg)^{1/2}$ থেকে বেশি হলে গাড়ি রাস্তা থেকে ছিটকে যাবে।

(খ) ব্যাঙ্কিং যুক্ত রাস্তায় গাড়ির বাঁক নেয়া : অনুভূমিক রাস্তায় গাড়ি জোরে বাঁক নিলে গাড়ির চাকা এবং রাস্তার মধ্যে ক্রিয়াশীল ঘর্ষণ বল চাকার ক্ষতি করে। এই শক্তি কমাবার জন্য এবং গাড়ি ছিটকে গিয়ে দুর্ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা রোধ করার জন্য প্রতিটি বাঁকে রাস্তার বাইরের দিক ভেতরের দিকের চেয়ে কিছুটা উঁচু করা হয় অর্থাৎ রাস্তাটি বাঁকের কেন্দ্রের দিকে একটু ঢালু করা থাকে। একে রাস্তার 'ব্যাঙ্কিং' বলে। এর ফলে গাড়ি বাঁক নেয়ার জন্য প্রয়োজনীয় অভিকেন্দ্র বলের একাংশ গাড়ির ওপর রাস্তা দ্বারা প্রযুক্ত প্রতিক্রিয়া বলের অনুভূমিক উপাংশ যোগান দেয়;. বাকি অংশ ঘর্ষণ থেকে আসে। ব্যাঙ্কিং কোণের মান সঠিক হলে প্রতিক্রিয়ার অনুভূমিক উপাংশ থেকেই প্রয়োজনীয় অভিকেন্দ্র বল পাওয়া যায়; তখন ঘর্ষণ বলের কোনো ভূমিকা থাকে না।



চিত্র ৪·৩৯

সংজ্ঞা : অনুভূমিক রাস্তায় হঠাৎ বাঁক নেওয়ার সময় গাড়ি যাতে ছিটকে গিয়ে দুর্ঘটনায় না পড়ে সেজন্য প্রতিটি বাঁকে রাস্তার বাইরের দিক ভিতরের দিকের চেয়ে কিছুটা উঁচু করে তৈরি করা হয়। একে রাস্তার ব্যাঙ্কিং বলে।

এখানে গাড়ির ওপর দুটি বল ক্রিয়া করছে— (i) গাড়ির ওজন W খাড়া নিচের দিকে ক্রিয়া করে এবং (ii) রাস্তা দ্বারা প্রযুক্ত প্রতিক্রিয়া R রাস্তার তলের সঙ্গে লম্বভাবে উপরের দিকে ক্রিয়া করে [চিত্র ৪·৩৯]। মনে করি, রাস্তার তল অনুভূমিক তলের সঙ্গে θ কোণে আনত; এই θ-কে ব্যাঙ্কিং কোণ (angle of banking) বলে। প্রতিক্রিয়া

R-এর উল্লম্ব উপাংশ $R \cos \theta$ গাড়ির ওজন W-কে প্রতিমিত করে এবং অনুভূমিক উপাংশ $R \sin \theta$ প্রয়োজনীয় অভিকেন্দ্র বলের যোগান দেয়। গাড়ির ভর m, দ্রুতি v এবং রাস্তার বাঁকের ব্যাসার্ধ r হলে

$$R \sin \theta = \frac{mv^2}{r}$$

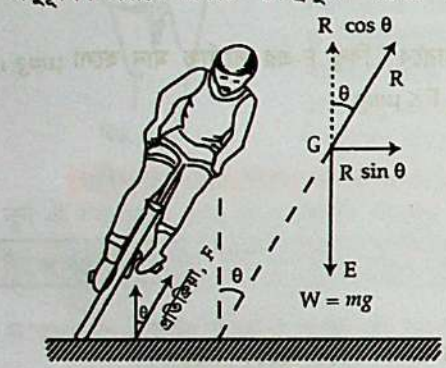
$$R \cos \theta = W = mg$$

ভাগ করে পাই, $\tan \theta = \frac{v^2}{rg}$ ... ... (4.50)

এই সমীকরণ থেকে সঠিক ব্যাঙ্কিং কোণের মান নির্ণয় করা যায়। এই মান গাড়ির দ্রুতি v-এর ওপর নির্ভর করে; এজন্য গাড়ির বেগের কেবলমাত্র একটি নির্দিষ্ট মানের জন্যই রাস্তার বাঁকে সঠিকভাবে ব্যাঙ্কিং করা যায়।

বর্তমানে আধুনিক হাইওয়ের (highway) প্রতিটি বাঁকে দুর্ঘটনা এড়াবার জন্য ব্যাঙ্কিং করা হয়। রেললাইনের বাঁকেও ব্যাঙ্কিং করা হয়; বাইরের লাইনটিকে ভেতরের লাইন থেকে উঁচু করে বসানো হয়। প্রতিটি বাঁকের মুখে সর্বোচ্চ দ্রুতিসীমা লেখা বোর্ড টাঙানো থাকে; ফলে চালকরা এই সীমার বেশি বেগে গাড়ি চালাবার বিপদ সম্পর্কে সজাগ থাকেন। তাই দুর্ঘটনার সম্ভাবনা কমে যায়।

২। **সাইকেল আরোহীর বাঁক নেওয়া** : কোনো সাইকেল আরোহীর বাঁক নেওয়ার ঘটনাও আমরা অনুরূপভাবে আলোচনা করতে পারি। বাঁক নেওয়ার সময় সাইকেলসহ আরোহী আপনা আপনিই ভেতরের দিকে অর্থাৎ রাস্তার বাঁকের কেন্দ্র যেদিকে সেদিকে ঝুঁকে পড়ে [চিত্র ৪.৪০]। বৃত্তাকার পথে সাইকেলসহ আরোহীকে বৃত্তের কেন্দ্রের দিকে অনুভূমিক করতে একটি কেন্দ্রমুখি বলের প্রয়োজন হয়। এই বলের যেকোনো দিকে সাইকেলসহ আরোহীকে বৃত্তের কেন্দ্রের দিকে হেলতে হয়। ফলে সাইকেলসহ আরোহী আনতভাবে রাস্তার উপর চাপ দেয়; অতএব রাস্তার প্রতিক্রিয়া R অনুভূমিক তলের সঙ্গে θ কোণ করে সাইকেলের ওপর প্রযুক্ত হয়। এই প্রতিক্রিয়ার অনুভূমিক উপাংশই প্রয়োজনীয় অভিকেন্দ্র বলের যোগান দেয়। যদি বাঁকের মুখে ভারসাম্য রক্ষা করার জন্য সাইকেলসহ আরোহী উল্লম্ব রেখার সঙ্গে θ কোণ করে ভেতরের দিকে ঝোঁকে তাহলে প্রতিক্রিয়া বল R এর উল্লম্ব এবং অনুভূমিক উপাংশ হবে $R \cos \theta$ এবং $R \sin \theta$। প্রতিক্রিয়ার এই উল্লম্ব উপাংশ আরোহীসমেত সাইকেলের ওজন mg-কে প্রশমিত করে আর অনুভূমিক উপাংশই প্রয়োজনীয় কেন্দ্রমুখি বল $\frac{mv^2}{r}$ সরবরাহ করে।



চিত্র ৪.৪০ : সাইকেল আরোহীর বাঁক নেওয়া।

$\therefore$ $R \cos \theta = mg$ ... ... (4.51)

এবং $R \sin \theta = \frac{mv^2}{r}$

সমীকরণ (4.50)-কে সমীকরণ (4.51) দ্বারা ভাগ করে পাই,

$\tan \theta = \frac{v^2}{rg}$ $\quad \therefore \theta = \tan^{-1}\left(\frac{v^2}{rg}\right)$ ... ... (4.52)

সাইকেলসহ আরোহীকে এই θ কোণে বাঁক নিতে হবে। আরোহীর বেগ যত বেশি হবে বাঁকের ব্যাসার্ধ তত কম হবে এবং তাকে তত বেশি হেলতে হবে। উপরোক্ত সমীকরণ থেকে সাইলেকসহ আরোহীর বেগ $v = \sqrt{rg \tan \theta}$ নির্ণয় করা যায়।

অনুধাবনমূলক কাজ : বাঁকা পথে সাইকেল চালাতে হলে সাইকেলসহ আরোহীকে বৃত্তের কেন্দ্রের দিকে হেলতে হয় কেন ?

সোজা পথে বাঁক নিতে গেলে উল্টে যাওয়ার সম্ভাবনা থাকে। বৃত্তাকার পথে সাইকেলসহ আরোহীকে বৃত্তের কেন্দ্রের দিকে অনুভূমিক বরাবর একটি কেন্দ্রমুখি বলের প্রয়োজন হয়। এই কেন্দ্রমুখি বলের যোগান দিতে সাইকেলসহ আরোহীকে বাঁকের কেন্দ্রের দিকে হেলতে হয়।

৩। **গ্রহগুলোর গতি (Motion of the planets)** : গ্রহগুলো নিজ নিজ কক্ষপথে সূর্যের চারদিকে আবর্তন করছে। এখানে প্রতিটি গ্রহের উপর ক্রিয়ারত সূর্যের মহাকর্ষীয় আকর্ষণ বলই হলো প্রয়োজনীয় অভিকেন্দ্র বল।

অনুরূপভাবে গ্রহের চারদিকে আবর্তনরত উপগ্রহের ক্ষেত্রে অভিকেন্দ্র বল হলো গ্রহের মহাকর্ষীয় আকর্ষণ বল।

গাণিতিক উদাহরণ ৪.১৩

১। 50 m ব্যাসের বৃত্তাকার পথে কোনো মোটর সাইকেল আরোহী কত বেগে ছুটলে উল্লম্ব তলের সাথে তিনি 30° কোণে আনত থাকবেন ?

আমরা জানি,

$$\tan\theta = \frac{v^2}{rg}$$

বা, $v^2 = rg\tan\theta$

বা, $v = \sqrt{rg\tan\theta}$

$\therefore\ v = \sqrt{25 \times 9.8 \times \tan(30°)}$

$= \sqrt{25 \times 9.8 \times 0.577}$

$= 11.89\ \text{ms}^{-1}$

এখানে,

$r = \frac{50}{2}\text{m} = 25\text{m}$

$\theta = 30°$

$g = 9.8\ \text{ms}^{-2}$

$v = ?$

২। 200 m ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বাঁকা পথে 50.4 kmh⁻¹ বেগে গাড়ি চালাতে পথটি কত কোণে কাত করে রাখতে হবে ? রাস্তাটি 2 m প্রশস্থ হলে, বাইরের পার্শ্ব ভেতরের পার্শ্ব অপেক্ষা কত উঁচু হতে হবে ?

আমরা জানি,

$$\tan\theta = \frac{v^2}{rg}$$

বা, $\tan\theta = \frac{(14)^2}{200 \times 9.8} = 0.1$

$\therefore\ \theta = \tan^{-1}(0.1)$

$= 5.7°$

θ-এর মান ক্ষুদ্র হলে,

$\tan\theta = \sin\theta = \frac{h}{x}$ লেখা যায়

এবং $\tan\theta = \frac{h}{x}$ $\quad\therefore\ 0.1 = \frac{h}{2}$

$\therefore\ h = 0.1 \times 2 = 0.2\ \text{m}$

এখানে,

ব্যাসার্ধ, $r = 200\ \text{m}$

বেগ, $v = 50.4\ \text{kmh}^{-1}$

$= \frac{50.4 \times 1000}{3600}\ \text{ms}^{-1}$

$= 14\ \text{ms}^{-1}$

$g = 9.8\ \text{ms}^{-2}$

$\theta = ?$

$x = 2\text{m}$

উচ্চতা, $h = ?$

উত্তর : 5.7° কোণে কাত করে রাখতে হবে এবং রাস্তাটির বাইরের পার্শ্ব ভেতরের পার্শ্ব হতে 0.2 m উঁচু হতে হবে।

৩। একজন সাইকেল আরোহী ঘণ্টায় 20 km বেগে 18 m ব্যাসার্ধের বৃত্তাকার পথে চলছে। উল্লম্ব দিকে এর নতির পরিমাণ কত?

ধরি, উল্লম্ব দিকের সাথে সাইকেল আরোহীর নতি কোণ = θ

আমরা জানি,

$$\tan\theta = \frac{v^2}{rg}$$

$\therefore\ \tan\theta = \frac{(5.55)^2}{18 \times 9.8}$

$= 0.1746$

$\therefore\ \theta = \tan^{-1}(0.1746)$

$= 9.9°$

এখানে,

সাইকেল আরোহীর বেগ,

$v = 20\ \text{km} = \frac{20 \times 1000}{60 \times 60} = 5.55\ \text{ms}^{-1}$

বৃত্তাকার পথের ব্যাসার্ধ, $r = 18\ \text{m}$

$g = 9.8\ \text{ms}^{-2}$

৪। একটি রেল লাইনের বাঁকের ব্যাসার্ধ 250 m এবং রেল লাইনের পাতদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব 1 m, ঘণ্টায় 50 km বেগে চলন্ত গাড়ির ক্ষেত্রে প্রয়োজনীয় ব্রেকিং এর জন্য বাইরের লাইনের পাতকে ভেতরের লাইনের পাত অপেক্ষা কতটুকু উঁচু করতে হবে ? [CUET Admission Test, 2013-14]

আমরা জানি,

$$\frac{h}{x} = \frac{v^2}{rg}$$

$\therefore\ h = \frac{v^2 x}{rg} = \frac{(13.89)^2 \times 1}{250 \times 9.8}$

$= 0.079\ \text{m}$

৫। একটি রাস্তা 100 m ব্যাসার্ধে বাঁক নিয়েছে। ওই স্থানে রাস্তাটি চওড়া 5 m এবং এর ভেতরের কিনারা হতে বাইরের কিনারা 50 cm উঁচু। সর্বোচ্চ কত বেগে ওই স্থানে নিরাপদে বাঁক নেয়া যাবে ?

[RUET Admission Test, 2015-16]

আমরা জানি,

$$\frac{h}{x} = \sin\theta = \tan\theta = \frac{v^2}{rg}$$

$$\frac{v^2}{rg} = \frac{h}{x}$$

$$\therefore \; v = \sqrt{\frac{hrg}{x}} = \sqrt{\frac{0.5 \times 100 \times 9.8}{5}} = 9.899 \text{ ms}^{-1}$$

৪.৩২ সংঘর্ষ
Collision

অতি অল্প সময়ের জন্য বৃহৎ কোনো বল ক্রিয়া করে বস্তুর গতির হঠাৎ ও ব্যাপক পরিবর্তন করাকে সংঘাত বা সংঘর্ষ বলে। ব্যাট দ্বারা ক্রিকেট বলকে আঘাত করা, ক্যারমের স্ট্রাইকার দ্বারা গুটিকে আঘাত করা, কামান হতে গোলা ছোঁড়া ইত্যাদি সংঘাত বা সংঘর্ষের উদাহরণ। একটি আলফা কণা যখন একটি স্বর্ণ নিউক্লিয়াসের খুবই নিকটে আসে তখন অল্প সময়ের জন্য উহারা পরস্পরকে প্রচণ্ড বলে বিকর্ষণ করে। এই ঘটনাকে সংঘর্ষ বলে।

সংঘর্ষ দুই প্রকার; যথা—

(ক) স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষ (Elastic Collision) এবং

(খ) অস্থিতিস্থাপক সংঘর্ষ (Inelastic Collision)

৪.৩২.১ স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষ
Elastic collision

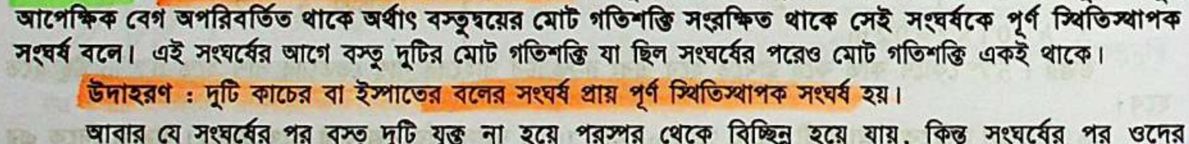
অণু বা পরমাণুর মধ্যে এবং ইলেকট্রন, প্রোটন, নিউট্রন ইত্যাদি কণার মধ্যে যখন সংঘর্ষ ঘটে তখন মোট গতিশক্তি সংরক্ষিত থাকে। এই ধরনের সংঘর্ষ পূর্ণ স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষ বলে মনে করা যায়। এই ধরনের সংঘর্ষ একটি আদর্শ ঘটনা, বাস্তবে এ রকম সংঘর্ষ দেখতে পাওয়া যায় না। সুতরাং বলা যায়, যে সংঘর্ষের আগে ও পরে দুটি বস্তুর আপেক্ষিক বেগ অপরিবর্তিত থাকে অর্থাৎ বস্তুদ্বয়ের মোট গতিশক্তি সংরক্ষিত থাকে সেই সংঘর্ষকে পূর্ণ স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষ বলে। এই সংঘর্ষের আগে বস্তু দুটির মোট গতিশক্তি যা ছিল সংঘর্ষের পরেও মোট গতিশক্তি একই থাকে।

উদাহরণ : দুটি কাচের বা ইস্পাতের বলের সংঘর্ষ প্রায় পূর্ণ স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষ হয়।

আবার যে সংঘর্ষের পর বস্তু দুটি যুক্ত না হয়ে পরস্পর থেকে বিচ্ছিন্ন হয়ে যায়, কিন্তু সংঘর্ষের পর ওদের আপেক্ষিক বেগ সংঘর্ষের আগের আপেক্ষিক বেগের চেয়ে কম হয়, তাকে **আংশিক স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষ বলে।** এই ধরনের সংঘর্ষে মোট গতিশক্তি সংরক্ষিত হয় না। সংঘর্ষের সময় কিছু পরিমাণ গতিশক্তি অন্য শক্তি মূলত তাপশক্তিতে রূপান্তরিত হয়। বাস্তবে এই ধরনের সংঘর্ষই সাধারণত ঘটে।

পূর্ণ স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষের ক্ষেত্রে :

মনে করি m_1 এবং m_2 ভরের দুটি বস্তু একই সরলরেখায় একই দিকে যথাক্রমে v_{01} এবং v_{02} আদিবেগে চলার সময় মুখোমুখি সংঘর্ষ (head-on collision) ঘটালো। ধরি সংঘর্ষটি পূর্ণ স্থিতিস্থাপক [চিত্র ৪.৪১]।



চিত্র ৪.৪১: পূর্ণ স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষ।

সংঘাতের সময় বস্তু দুটি পরস্পরের উপর বিপরীতমুখি ক্রিয়া প্রতিক্রিয়া বল F প্রয়োগ করে। F একটি ঘাত বল এবং এর ক্রিয়ায় প্রতিটি বস্তুরই ভরবেগের পরিবর্তন ঘটে। মনে করি, সংঘর্ষের পর বস্তু দুটি একই সরলরেখায় একই দিকে যথাক্রমে v_1 এবং v_2 বেগ নিয়ে চলতে থাকে। সংঘর্ষের আগে ও পরে বস্তু দুটির বেগের অভিমুখ একই দিকে ধরা হয়েছে। এখানে $v_{01} > v_{02}$ হলে বস্তু দুটির মধ্যে সংঘর্ষ ঘটবে এবং $v_2 > v_1$ হলে বস্তু দুটি সংঘর্ষের পর বিচ্ছিন্ন হয়ে যাবে।

এক্ষেত্রে সংঘর্ষের পূর্বে আপেক্ষিক বেগ = $v_{01} - v_{02}$
সংঘর্ষের পর আপেক্ষিক বেগ = $v_2 - v_1$
স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষের সংজ্ঞানুযায়ী সংঘর্ষের আগে ও পরে আপেক্ষিক বেগ অপরিবর্তিত থাকে।
সুতরাং, $v_{01} - v_{02} = v_2 - v_1$
ভরবেগের নিত্যতার সূত্র অনুযায়ী,
সংঘর্ষের আগে মোট ভরবেগ = সংঘর্ষের পরে মোট ভরবেগ

$$m_1v_{01} + m_2v_{02} = m_1v_1 + m_2v_2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (4.53)$$

এই সমীকরণ থেকে v_1 এবং v_2 মান নির্ণয় করা যায়। এই দুই বেগ থেকে সংঘর্ষের পরের গতিশক্তিও নির্ণয় করা যায়।

আবার সংঘর্ষের পূর্বের গতিশক্তি $= \frac{1}{2}m_1v_{01}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{02}^2$ পূর্ণ স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষে গতিশক্তি সংরক্ষিত হয়। তাই সংঘর্ষের পূর্বের ও পরের গতিশক্তি উভয় পাশে সমান লেখে সমাধান করলে আমরা পাই,

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_{01}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{02}^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (4.54)$$

অর্থাৎ সংঘর্ষের পরের গতিশক্তি = সংঘর্ষের পূর্বের গতিশক্তি।

সংঘর্ষের পরে বেগ নির্ণয় :

মনে করি m_1 ও m_2 ভরের দুইটি বস্তু একই সরলরেখা বরাবর একই দিকে যথাক্রমে v_{01} এবং v_{02} বেগে গতিশীল। $v_{01} > v_{02}$ হওয়ায় এদের মধ্যে স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষ ঘটে। সংঘর্ষের পরের বেগ v_1 ও v_2 হলে, ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্রানুসারে, সংঘর্ষের পূর্বের মোট ভরবেগ = সংঘর্ষের পরের মোট ভরবেগ

$$m_1v_{01} + m_2v_{02} = m_1v_1 + m_2v_2$$

$$m_1(v_{01} - v_1) = m_2(v_2 - v_{02}) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (i)$$

যেহেতু সংঘর্ষটি স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষ কাজেই সংঘর্ষের পূর্বের গতিশক্তির সমষ্টি সংঘর্ষের পরের গতিশক্তির সমষ্টির সমান হয়।

$$\frac{1}{2}m_1v_{01}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{02}^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$$

$$\frac{1}{2}m_1(v_{01}^2 - v_1^2) = \frac{1}{2}m_2(v_2^2 - v_{02}^2) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (ii)$$

সমীকরণ (ii) কে সমীকরণ (i) দ্বারা ভাগ করে পাই,

$$v_{01} + v_1 = v_2 + v_{02}$$

$$v_2 = v_{01} + v_1 - v_{02}$$

(i) নং সমীকরণে v_2 এর মান বসিয়ে পাই,

$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_{01} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}v_{02} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (iii)$$

v_1 এর মান (i) সমীকরণে বসিয়ে পাই, (হিসাব করার পর)

$$v_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}v_{02} + \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_{01} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (iv)$$

বিশেষ ক্ষেত্রসমূহ :

(i) বস্তু দুটির ভর সমান অর্থাৎ $m_1 = m_2$ হলে, সমীকরণ (iii) ও (iv) থেকে পাই, $v_{01} = v_2$ এবং $v_{02} = v_1$
অর্থাৎ সংঘর্ষের পর বস্তু দুটি বেগ বিনিময় করে।

(ii) বস্তু দুটির ভর সমান এবং শুরুতে দ্বিতীয় বস্তুটি গতিহীন। এক্ষেত্রে $m_1 = m_2$ এবং $v_{02} = 0$। অতএব উপরোক্ত সমীকরণ দুটি থেকে পাওয়া যায়, $v_1 = 0$ এবং $v_2 = v_{01}$।
অর্থাৎ সংঘাতের পর প্রথম বস্তু থেমে যায় এবং দ্বিতীয় বস্তু প্রথম বস্তুর বেগ নিয়ে চলতে থাকে।

(iii) বস্তু দুটির ভর অসমান এবং শুরুতে দ্বিতীয় বস্তুটি গতিহীন। এক্ষেত্রে $m_1 \neq m_2$ এবং $v_{02} = 0$। সমীকরণ (iii) ও (iv) থেকে পাই,

$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_{01} \text{ এবং } v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_{02}$$

অর্থাৎ $m_1 \neq m_2$ হলে, সংঘাতের ফলে প্রথম বস্তুটিকে গতিহীন করা যায় না।

(iv) প্রথম বস্তুটি অত্যন্ত ভারী এবং শুরুতে দ্বিতীয় বস্তুটি গতিহীন। এক্ষেত্রে, $m_1 >> m_2$ এবং $v_{02} = 0$। সুতরাং লেখা যায়, $m_2 - m_1 \simeq m_1$ এবং $m_2 + m_1 \simeq m_1$। অতএব, $v_1 = v_{01}$ এবং $v_2 = 2v_{01}$। অর্থাৎ সংঘাতের পর ভারী বস্তুটির বেগ প্রায় অপরিবর্তিত থাকে; কিন্তু হাল্কা বস্তুটি ভারী বস্তুর প্রায় দ্বিগুণ বেগে ছুটে যায়।

(v) দ্বিতীয় বস্তুটি অত্যন্ত ভারী এবং শুরুতে গতিহীন। এক্ষেত্রে, $m_2 >> m_2$ এবং $v_{02} = 0$। সুতরাং লেখা যায়, $m_1 - m_2 \simeq - m_2$ এবং $m_1 + m_2 \simeq m_2$। অতএব সমীকরণ (iii) ও (iv) থেকে পাই, $v_1 = v_{01}$ এবং $v_2 = 0$। অর্থাৎ সংঘাতের পরে ভারী বস্তুটি স্থিরই থাকবে এবং হাল্কা বস্তুটি তার প্রাথমিক বেগে বিপরীত দিকে ছুটে যাবে।

অনুধাবনমূলক কাজ : একটি দেওয়ালে একটি বল ধাক্কা খেয়ে পিছনে ফিরে আসে কেন ?

দুটি বস্তুর স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষের ক্ষেত্রে সংঘর্ষের পর প্রথম বস্তুর বেগ, $v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{01} + \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right) \times v_{02}$

দেওয়ালের সাথে বলের সংঘর্ষের ক্ষেত্রে $v_{02} = 0$ হয় এবং $m_2 >> m_1$। সুতরাং $v_1 = - v_{01}$ এবং $v_{02} = 0$ অর্থাৎ দেওয়াল স্থির থাকবে এবং বলটি একই বেগ নিয়ে বিপরীত দিকে ফিরে আসবে।

হাতে কলমে কাজ : তুমি হাতে একটি বল নাও। এবার এটিকে একটি টেবিলের উপর ছুড়ে দাও। টেবিলটি কোন দিকে যাবে? বলটি টেবিলে ধাক্কা খেয়ে বিপরীত দিকে আসবে কেন?

কোনো হালকা বস্তু কোনো ভারী স্থির বস্তুর সঙ্গে সংঘর্ষে লিপ্ত হলে ভারী বস্তুটি স্থির থাকে এবং হালকা বস্তুটি প্রায় দ্বিগুণ বেগে বিপরীত দিকে ছুটে যায়।

অনুধাবনমূলক কাজ : স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষের ক্ষেত্রে দুটি সমান ভরের বস্তু পরস্পর বেগ বিনিময় করে—ব্যাখ্যা কর।

দুটি সমান ভরের বস্তুর স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষে বস্তুদ্বয় পরস্পর বেগ বিনিময় করে। এর ব্যাখ্যা নিম্নরূপ :

ধরি বস্তু দুটি ভর $m_1 = m_2$ এবং স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষের ক্ষেত্রে সংঘর্ষের পরের বেগ v_1 এবং v_2 এবং সংঘর্ষের আগের বেগ u_1 এবং u_2। তা হলে আমরা পাই,

$$m_1u_1 + m_2u_2 = m_1v_1 + m_2v_2$$

বা, $m_1u_1 - m_2v_1 = m_2v_2 - m_2u_2$

বা, $u_1 - v_1 = v_2 - u_2 \quad \ldots \quad \ldots \quad$ (i)

আবার (i) নং সমীকরণ থেকে পাই, $\frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$

বা, $\frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_2^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2$

বা, $u_1^2 - v_2^2 = v_2^2 - u_2^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad$ (ii)

সমীকরণ (ii)-কে সমীকরণ (i) দ্বারা ভাগ করে পাই,

$$\frac{u_1^2 - v_2^2}{u_1 - v_1} = \frac{v_2^2 - u_2^2}{v_2 - u_2}$$

বা, $\frac{(u_1 - v_2)(u_1 + v_2)}{u_1 - v_1} = \frac{(v_2 - u_2)(v_2 + u_2)}{v_2 - u_2}$

বা, $u_1 + v_1 = v_2 + u_2 \quad \ldots \quad \ldots \quad$ (iii)

সমীকরণ (i) ও সমীকরণ (iii) যোগ করে পাই,

$$u_1 - v_1 + u_1 + v_1 = v_2 - u_2 + v_2 + u_2$$

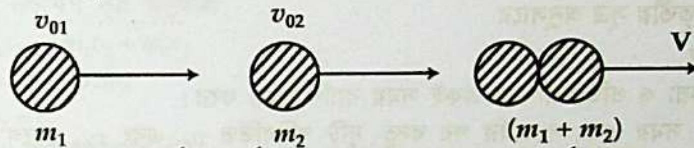
বা, $2u_1 = 2v_2$

$\therefore \quad \boxed{u_1 = v_2} \quad \ldots \quad \ldots \quad$ (iv)

সুতরাং সমান ভরের দুটি বস্তুর স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষে বস্তুদ্বয় পরস্পর বেগ বিনিময় করে।

৪.৩২.২ অস্থিতিস্থাপক সংঘর্ষ
Inelastic collision

তোমরা দুটি কাঁদামাটির নরম বল লও এবং বল দুটির সংঘর্ষ ঘটাও। তাহলে দেখতে পাবে যে, এই সংঘর্ষে মোট গতিশক্তি সংরক্ষিত হয় না। এই ধরনের সংঘর্ষও একটি আদর্শ ঘটনা। এ ধরনের সংঘর্ষ অস্থিতিস্থাপক সংঘর্ষ। **অর্থাৎ যে দুটি পরস্পরের সঙ্গে যুক্ত হয়ে একটি বস্তুরূপে চলতে থাকে অর্থাৎ যে সংঘর্ষের পর বস্তু দুটির আপেক্ষিক বেগ শূন্য হয় এবং বস্তুগুলোর সংঘর্ষের পর বস্তু মোট গতিশক্তি সংরক্ষিত হয় না, তাকে অস্থিতিস্থাপক সংঘর্ষ বলে।**



চিত্র ৪.৪২: পূর্ণ অস্থিতিস্থাপক সংঘর্ষ।

৪.৪২ চিত্রে পূর্ণ অস্থিতিস্থাপক সংঘর্ষ দেখানো হয়েছে। m_1 এবং m_2 ভরের দুটি বস্তু একই সরলরেখায় একই দিকে যথাক্রমে v_{01} এবং v_{02} বেগে চলে পরস্পরের সঙ্গে মুখোমুখি সংঘর্ষ ঘটাল। সংঘর্ষের পর বস্তু দুটি পরস্পর যুক্ত হয়ে একই দিকে v বেগে চলতে লাগল।

এখন রৈখিক ভরবেগের সংরক্ষণ নীতি থেকে পাই,

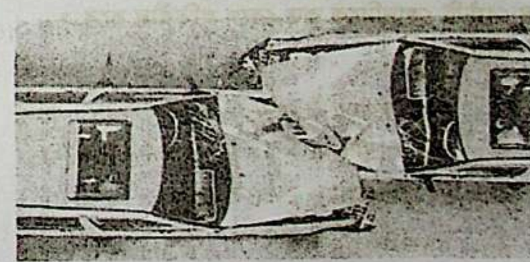
সংঘর্ষের আগে মোট ভরবেগ = সংঘর্ষের পরে মোট ভরবেগ

$$\therefore \quad m_1v_{01} + m_2v_{02} = (m_1 + m_2)v$$

$$\text{বা,} \quad v = \frac{m_1v_{01} + m_2v_{02}}{m_1 + m_2} \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (4.55)$$

সংঘর্ষের আগে মোট গতিশক্তি $\frac{1}{2}mv_{01}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{02}^2$ এবং সংঘর্ষের পর মোট গতিশক্তি $\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2$ বিয়োগ করে গতিশক্তি ক্ষয় নির্ণয় করা যায়। দেখা যায় যে, গতিশক্তির ক্ষয় আপেক্ষিক বেগ $(v_{01} - v_{02})$ এর বর্গের সমানুপাতিক হয়।

যাচাই কর : পাশের চিত্রটি লক্ষ কর [চিত্র ৪.৪৩]। গাড়িটি কি ধরনের সংঘর্ষে লিপ্ত হয়েছে ? স্বভাবতই গাড়িটির সংঘর্ষের পর আপেক্ষিক বেগ 0। যদি সংঘর্ষের পূর্বে গাড়িদ্বয়ের বেগ যথাক্রমে u_1, u_2 হয় তাহলে সংঘর্ষের পরে বেগ v এর সমীকরণটি লিখে প্রকাশ কর।

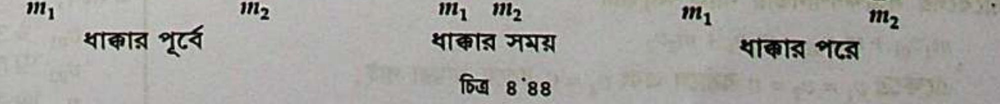


চিত্র ৪.৪৩

৪.৩২.৩ একমাত্রিক সংঘর্ষ
One-dimensional collision

বাচ্চারা যখন মার্বেল খেলে তখন একটি মার্বেল আর একটি মার্বেলকে ধাক্কা দিলে তা যদি ধাক্কার পর সরল পথে চলতে থাকে তাহলে যে সংঘর্ষ হয় তা একমাত্রিক সংঘর্ষ। **অর্থাৎ সংঘাতাধীন বস্তু দুটির আপেক্ষিক গতিবেগ সংঘর্ষের আগে ও পরে একই সরলরেখা বরাবর হলে, ওই সংঘাতকে একমাত্রিক সংঘর্ষ বলে।**

মনে করি কোনো একটি সরলরেখায় m_1 এবং m_2 ভরের দুটি বস্তুকণা যথাক্রমে x অক্ষ বরাবর v_{01} এবং v_{02} বেগে একই দিকে চলছে [চিত্র ৪.৪৪]। এখানে $v_{01} > v_{02}$। কোনো এক সময়ে প্রথম বস্তুকণাটি পেছনের দিক হতে



চিত্র ৪.৪৪

দ্বিতীয় বস্তুকণাকে ধাক্কা দিল এবং এরপর বস্তুকণা দুটি একই সরলরেখায় ও একই দিকে যথাক্রমে v_1 এবং v_2 বেগে চলতে লাগল।

এখানে m_2 ভরের বস্তুর উপর প্রযুক্ত ক্রিয়া বল F_1 এবং m_2 ভরের বস্তুটিও m_1 ভরের বস্তুটিতে F_2 প্রতিক্রিয়া সৃষ্টি করে।

আবার মনে করি ধাক্কাজনিত ক্রিয়া ও প্রতিক্রিয়ার কার্যকাল t, তা হলে

বস্তুকণা দুটির আদি ভরবেগের সমষ্টি $= m_1v_{01} + m_2v_{02}$ ... ... (4.56)

বস্তুকণা দুটির শেষ ভরবেগের সমষ্টি $= m_1v_1 + m_2v_2$

নিউটনের গতির তৃতীয় সূত্র অনুসারে

ক্রিয়া = প্রতিক্রিয়া $\therefore\ F_2 = -F_1$

সংঘর্ষের সময় ক্রিয়া ও প্রতিক্রিয়া বল একই সময় ব্যাপি ক্রিয়া করে।

ধরি সংঘর্ষকালীন সময় এবং সংঘর্ষের পর বস্তু দুটি পরিবর্তিত v_{01} এবং v_{02} বেগে একই সরলরেখা বরাবর চলতে থাকবে। এই ক্রিয়া ও প্রতিক্রিয়ার ফলে বস্তু দুটির ত্বরণ যথাক্রমে a_1 এবং a_2 হয়।

$\therefore\quad F_1 = -F_2$

$\therefore\quad m_1a_1 = -m_2a_2$

বা, $m_1\dfrac{(v_1 - v_{01})}{t} = -m_2\dfrac{(v_2 - v_{02})}{t}$

বা, $m_1v_1 - m_1v_{01} = -m_2v_2 + m_2v_{02}$

বা, $m_1v_{01} + m_2v_{02} = m_1v_1 + m_2v_2$ ... ... (4.57)

ভরবেগের সংরক্ষণশীলতার নীতি অনুযায়ী সংঘর্ষের পূর্বের ভরবেগ = সংঘর্ষের পরের ভরবেগ

এই সমীকরণ একমাত্রিক সংঘর্ষের সমীকরণ।

গাণিতিক উদাহরণ ৪.১৪

১। পানিতে স্থিরভাবে ভাসমান 200 kg একটি বোটের উপর দুই বিপরীত প্রান্তে দুইজন বালক দাঁড়িয়ে আছে। তাদের ভর যথাক্রমে 40 kg এবং 70 kg। যদি তারা প্রত্যেকে এক সাথে 4 ms⁻¹ অনুভূমিক বেগে বোট থেকে লাফ দেয় তাহলে বোটটি কোনদিকে কত বেগে গতিশীল হবে ?

আমরা জানি,

$m_1u_1 + m_2u_2 + m_3u_3 = m_1v_1 + m_2v_2 + m_3v_3$

বা, $0 + 0 + 0 = 40\times4 + 70\times -4 + 200\times v_3$

বা, $-120 + 200\,v_3 = 0$

$\therefore\quad v_3 = 0{\cdot}6\ \text{ms}^{-1}$ এবং

দিক হবে m_2 ভরের দিকে

দেয়া আছে

প্রথম বালকের ভর, $m_1 = 40$ kg

দ্বিতীয় বালকের ভর, $m_2 = 70$ kg

বোটের ভর, $m_3 = 200$ kg

লাফ দেবার আগে,

প্রথম বালকের বেগ, $u_1 = 0$

দ্বিতীয় বালকের বেগ, $u_2 = 0$

বোটের বেগ, $u_3 = 0$

লাফ দেবার পর,

প্রথম বালকের বেগ, $v_1 = 4\ \text{ms}^{-1}$

দ্বিতীয় বালকের বেগ, $v_2 = -4\ \text{ms}^{-1}$

বোটের বেগ, $v_3 = ?$

২। 3 ms⁻¹ বেগে 2 kg ভরের একটি বলের সঙ্গে 0·5 kg ভরের আরেকটি স্থির বলের সোজাসুজি সংঘর্ষ ঘটে। যদি (ক) সংঘর্ষের পর এরা একত্রে অন্যের সঙ্গে আটকে যায় এবং (খ) সংঘর্ষটি পূর্ণ স্থিতিস্থাপক হয়, তবে সংঘর্ষের পর বল দুটির বেগ কত হবে ?

(ক) সংঘর্ষের পর বল দুটি একে অন্যের সঙ্গে আটকে যায় বলে সংঘর্ষটি পূর্ণ অস্থিতিস্থাপক হবে। এখানে সংঘর্ষের পর বল দুটির বেগ একই হবে।

ভরবেগের সংরক্ষণশীলতার নীতি অনুযায়ী

$m_1v_{01} + m_2v_{02} = m_1v_1 + m_2v_2$

$\therefore$ এক্ষেত্রে $v_1 = v_2 = v$ বসালে এবং $v_2 = 0$ ধরলে আমরা পাই,

$2\times3 + 0 = (2 + 0{\cdot}5)\times v$

সুতরাং $v = 2{\cdot}4\ \text{ms}^{-1}$

এখানে,

$v_{01} = 3$

$v_{02} = 0$

$v = ?$

(খ) সংঘর্ষটি পূর্ণ স্থিতিস্থাপক বলে পূর্ণ স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষের ক্ষেত্রে আমরা জানি,

$$v_{01} - v_{02} = v_2 - v_1$$
$$3 - 0 = (v_2 - v_1)$$
$$\therefore \quad v_2 - v_1 = 3\ \text{ms}^{-1} \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \text{(i)}$$

আবার ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্র অনুযায়ী

$$m_1v_{01} + m_2v_{02} = m_1v_1 + m_2v_2$$
$$2 \times 3 + 0 = 2v_1 + 0{\cdot}5v_2$$
$$\therefore \quad 2v_1 + 0{\cdot}5v_2 = 6 \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \text{(ii)}$$

সমীকরণ (i) ও (ii) সমাধান করে পাই, $v_1 = 1{\cdot}8\ \text{ms}^{-1}$ এবং $v_2 = 4{\cdot}8\ \text{ms}^{-1}$

সুতরাং সংঘর্ষের পর বল দুটি একই দিকে অগ্রসর হবে।

৩। $3\ \text{ms}^{-1}$ বেগে 2 kg ভরের একটি বস্তুর সঙ্গে 0·5 kg ভরের অন্য একটি স্থির বস্তু সোজাসুজি স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষে লিপ্ত হয়। সংঘর্ষের পর দ্বিতীয় বস্তুর বেগ কত হবে ? [চ. বো. ২০১৫]

আমরা জানি,

$$v_2 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_1} \times v_{02} + \frac{2\,m_1}{m_1 + m_2} \times v_{01}$$
$$= \left(\frac{2 - 0{\cdot}5}{2 + 0{\cdot}5}\right) \times 0 + \frac{2 \times 2}{2 + 0{\cdot}5} \times 3$$
$$= 4{\cdot}8\ \text{ms}^{-1}$$

এখানে,
$m_1 = 2\ \text{kg}$
$m_2 = 0{\cdot}5\ \text{kg}$
$v_{01} = 3\ \text{ms}^{-1}$
$v_{02} = 0$
$v_2 = ?$

৪। 4 kg ভরের একটি বস্তু অন্য একটি স্থির বস্তুর সাথে স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষে লিপ্ত হলো। সংঘর্ষের পর বস্তুটি একই দিকে আদিবেগের এক–চতুর্থাংশ বেগ নিয়ে চলতে থাকল। স্থির বস্তুর ভর কত ?

আমরা জানি,

$$v_2 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_1} \times v_{02} + \frac{2\,m_1}{m_1 + m_2} \times v_{01}$$
বা, $$v_2 = \frac{4 - m_2}{4 + m_2} \times v_{02} + \frac{2\,m_1}{m_1 + m_2} \times 0$$
বা, $$\frac{v_2}{v_{02}} = \frac{4 - m_2}{4 + m_2}$$
বা, $$\frac{1}{4} = \frac{4 - m_2}{4 + m_2}$$
বা, $$4 + m_2 = 8 - 4m_2$$
বা, $$5m_2 = 4$$
$$\therefore \quad m_2 = \frac{4}{5}\ \text{kg} = 0{\cdot}8\ \text{kg}$$

এখানে,
$m_1 = 4\ \text{kg}$
$v_{02} = v_2$
$m_2 = ?$
$\frac{v_2}{v_{02}} = \frac{1}{4}$
$v_{01} = 0$

প্রয়োজনীয় গাণিতিক সূত্রাবলি

$$\omega = \frac{\theta}{t} \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$
$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$$
$$\alpha = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t} \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (3)$$
$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (4)$$
$$a = \alpha r \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (5)$$
$$\theta = \omega t \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (6)$$
$$\omega = \omega_0 + \alpha t \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (7)$$
$$\theta = \omega_0 + \frac{1}{2}\alpha t^2 \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (8)$$

$$\omega = \frac{\theta}{t} = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi\omega}{t} = 2\pi n = \frac{v}{r} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (9)$$

$$\alpha = \frac{\omega}{t} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (10)$$

$$F = ma \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (11)$$

$$m_1u_1 + m_2u_2 = m_1v_1 + m_2v_2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (12)$$

$$m_1u_1 + m_2u_2 = (m_1 + m_2)v \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (13)$$

$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{01} + \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right) \times v_{02} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (14)$$

$$F = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (15)$$

$$\tan\theta = \frac{v^2}{rg} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (16)$$

$$I = \sum mr^2 = MK^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (17)$$

$$K.E = \frac{1}{2} I\omega^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (18)$$

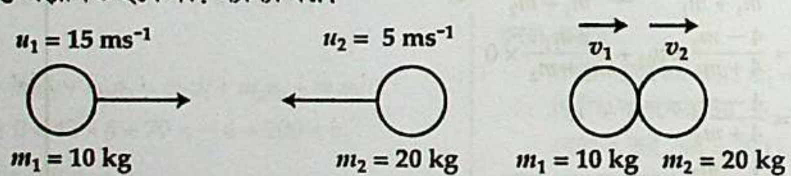
$$L = I\omega \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (19)$$

$$\tau = I\alpha \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (20)$$

$$\tau = \frac{dL}{dt} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (21)$$

উচ্চতর দক্ষতাভিত্তিক নমুনার গাণিতিক উদাহরণ

১। নিচের চিত্রটি লক্ষ কর। উদ্দীপকে উল্লিখিত ঘটনার
(ক) মিলিত বেগ কত হবে ?
(খ) গতিশক্তি সংরক্ষিত হবে কী? ব্যাখ্যা কর।



সংঘর্ষের পূর্বে — সংঘর্ষের পর

(ক) চিত্র অনুযায়ী, আমরা জানি,

$$m_1u_1 - m_2u_2 = (m_1 + m_2)v$$
$$10 \times 15 - 20 \times 5 = (10 + 20)(v)$$
বা, $150 - 100 = 30 \times v$ বা, $50 = 30v$

$\therefore$ $v = \frac{5}{3}\ ms^{-1}$ (মিলিত বেগ)

এখানে,
$m_1 = 10\ kg$
$u_1 = 15\ ms^{-1}$
$m_2 = 20\ kg$
$u_2 = 5\ ms^{-1}$
মিলিত বেগ, $v = ?$

(খ) সংঘর্ষের পূর্বে গতিশক্তি $= \frac{1}{2}mu_1^2 + \frac{1}{2}mu_2^2 = \frac{1}{2} \times 10 \times (15)^2 + \frac{1}{2} \times 20 \times (5)^2$

$$= 5 \times (15)^2 + 10 \times 25 = 1125 + 250 = 1375\ J$$

সংঘর্ষের পরের গতিশক্তি $= \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2$ | $v_1 = v_2 = v = \frac{5}{3} ms^{-1}$

$$= \frac{1}{2} \times 10 \times \left(\frac{5}{3}\right)^2 + \frac{1}{2} \times 20 \times \left(\frac{5}{3}\right)^2$$

$$= 5 \times \frac{25}{9} + 10 \times \frac{25}{9} = \frac{25}{9}(5 + 10)$$

$$= \frac{25}{9} \times 15 = 41.67\ J$$

দেখা যাচ্ছে যে, উভয় ক্ষেত্রে গতিশক্তি সমান নয়। অর্থাৎ গতিশক্তি সংরক্ষিত হবে না।

২। 4 kg ভরের একটি বস্তুকে 0·2 m লম্বা দড়ি দিয়ে একটি নির্দিষ্ট অক্ষের চারদিকে 2 rad s^{-1} বেগে ঘোরানো হচ্ছে।

(ক) ঘূর্ণায়মান কণাটির কৌণিক ভরবেগ বের কর।

(খ) বস্তুটির ভর অর্ধেক হলে টর্কের কীরূপ পরিবর্তন হবে ? গাণিতিক বিশ্লেষণের মাধ্যমে ব্যাখ্যা কর। [য. বো, ২০১৬]

(ক) আমরা জানি,

$$L = I\omega = mr^2\omega = 8 \times 0{\cdot}2 \times 2 = 0{\cdot}64 \text{ kg m}^2\text{s}^{-1}$$

(খ) আমরা জানি, কৌণিক ত্বরণ α হলে,

টর্ক, $\tau = I\alpha = mr^2\alpha$

$\therefore \quad \tau_1 = m_1 r^2\alpha$

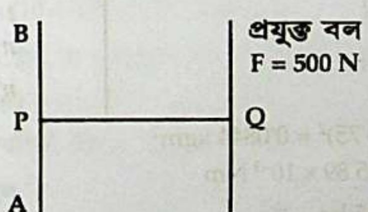
বা, $m_2 = \frac{m_1}{2}$ হলে

বা, $\tau_2 = \frac{m_1}{2} r^2\alpha$

$\therefore \quad \frac{\tau_2}{\tau_1} = \frac{m_1 r^2\alpha}{2 \times m_1 r^2\alpha} = \frac{1}{2}$

$\therefore \quad \tau_2 = \frac{\tau_1}{2}$ অর্থাৎ টর্ক অর্ধেক হয়ে যাবে।

৩।



(ক) AB ঘূর্ণন অক্ষের সাপেক্ষে PQ দণ্ডটির টর্ক নির্ণয় কর।

(খ) যদি ঘূর্ণন অক্ষ AB, PQ দণ্ডটির প্রান্ত বিন্দু হতে পরিবর্তন করে মধ্য বিন্দুতে নেওয়া হয়, তবে কোন ক্ষেত্রে জড়তার ভ্রামক বেশি হবে—তোমার উত্তরের সপক্ষে গাণিতিক যুক্তি প্রদর্শন কর। [সি. বো. ২০১৬]

(ক) আমরা জানি,

টর্ক, $\tau = rF\sin\theta = 1 \times 500 \times \sin 90° = 500 \text{ N}$

(খ) কোনো দণ্ডের প্রান্ত দিয়ে গমনকারী অক্ষের সাপেক্ষে জড়তার ভ্রামক, $I_1 = \frac{Ml^2}{3}$

আবার, ঘূর্ণন অক্ষ দণ্ডের কেন্দ্রের মধ্য দিয়ে গেলে,

$I_2 = \frac{Ml^2}{12}$

$\therefore \quad \frac{I_1}{I_2} = \frac{Ml^2}{3} \times \frac{12}{Ml^2} = 4$

$\therefore \quad I_1 = 4I_2$ অর্থাৎ প্রথম ক্ষেত্রে জড়তার ভ্রামক বেশি হবে।

৪। একটি ট্রেন 200 m ব্যাসার্ধের একটা রেল লাইনের বাঁকে ঘুরছে। দুটি পাতের মধ্যবর্তী দূরত্ব 1m। ঘণ্টায় 50·4 km বেগে চলন্ত গাড়ি ঘোরার জন্য

(ক) রেল লাইনের ভেতরের ও বাইরের পাতের উচ্চতা নির্ণয় কর।

(খ) দুই পাতের উচ্চতা সমান হলে কী ঘটবে আর না হলে কী ঘটবে ? ব্যাখ্যা কর।

(ক) আমরা জানি,

$\tan\theta = \frac{v^2}{rg}$

বা, $\tan\theta = \frac{(14)^2}{200 \times 9{\cdot}8} = 0{\cdot}1$

বা, $\tan\theta = 0{\cdot}1$

θ এর মান ক্ষুদ্র হলে $\tan\theta = 0{\cdot}1$ লেখা যায়।

এখানে,

$r = 200 \text{ m}$

$g = 9{\cdot}8 \text{ ms}^{-2}$

$v = 50{\cdot}4 \text{ km h}^{-1}$

$= \frac{50{\cdot}4 \times 1000}{60 \times 60} = 14 \text{ ms}^{-1}$

$r = 1 \text{ m}$

ধরি দুটি লাইনের মধ্যে দূরত্ব $= x$

এক লাইন হতে অন্য লাইনের উচ্চতা h রাখা হলো

$\therefore \quad \tan\theta = \frac{h}{x}$

বা, $\quad h = 0.1 \times 1 = 0.1$ m

(খ) ভেতরের লাইন অপেক্ষা বাইরের লাইন 0.1 m উঁচু করে তৈরি করলে রেল গাড়িটি নির্বিঘ্নে চলতে পারবে। কারণ কেন্দ্রবিমুখি বা অপকেন্দ্র বলের প্রভাব থেকে রেল গাড়িকে মুক্ত করতে হলে বাইরের লাইনকে অবশ্যই উঁচু করে স্থাপন করতে হবে। আর যদি দুটি লাইন সমান উচ্চতায় থাকে তাহলে বাঁক নেওয়ার সময় প্রয়োজনীয় কেন্দ্রমুখি বল সরবরাহ করতে হয়। কেন্দ্রমুখি বলের অভাবে গতি জড়তার কারণে যানবাহন উল্টে যাওয়ার সম্ভাবনা থাকে। এই জড়তাকে প্রশমিত করতে বাইরের লাইনকে ভেতরের লাইন অপেক্ষা উঁচু করে তৈরি করতে হয়।

৫। 150 g ভরের একটি ক্ষুদ্র বস্তু A কে 75 cm লম্বা সুতার সাহায্যে ঘোরানো হচ্ছে। এটি স্থির অবস্থান থেকে ঘুরতে আরম্ভ করে 3 মিনিট পর থেকে প্রতি মিনিটে 120 বার করে ঘুরছে।

(ক) A বস্তুটির উপর কার্যকরী টর্কের মান নির্ণয় কর।

(খ) A বস্তুটির উপর কী পরিমাণ টান কাজ করবে? এই টানের মান 4 গুণ করলে রৈখিক বেগের কী পরিবর্তন হবে মতামত দাও।

(ক) আমরা জানি,

$\omega = 2\pi n = 2\pi \times 2$

$= 12.56 \text{ rad s}^{-1}$

কৌণিক ত্বরণ α হলে, $\omega = \omega_0 + \alpha t$

বা, $\quad 12.56 = 0 + \alpha \times 3 \times 60$

$\therefore \quad \alpha = 0.0698 \text{ rad s}^{-1}$

এখানে,

$m = 150 \text{ g} = 0.15 \text{ kg}$

$r = 75 \text{ cm} = 0.75 \text{ m}$

$t = 3 \text{ min} = 3 \times 60 \text{ s} = 180 \text{ sec}$

$n = 120 \text{ rev/min.}$

$n = \frac{120}{60} \text{ rev/s} = 2 \text{ rev/s}$

জড়তার ভ্রামক $I = mr^2 = 0.15 \times (0.75)^2 = 0.0844 \text{ kgm}^2$

টর্ক, $\tau = I\alpha = 0.0844 \times 0.0698 = 5.89 \times 10^{-3}$ Nm

(খ) বস্তুর ভর $\quad m = 150 \text{ g} = 0.15 \text{ kg}$

$r = 75 \text{ cm} = 0.75 \text{ m}$

$\omega = \frac{2\pi N}{60} = \frac{2\pi \times 120}{60}$

$= 12.56 \text{ rads}^{-1}$

রৈখিক বেগ, $v = \omega r = 12.56 \times 0.75 = 9.42 \text{ ms}^{-1}$

সুতার টান $F = \frac{mv^2}{r} = \frac{0.15 \times (9.42)^2}{0.75} = 17.75$ N

অতএব, বস্তুটির উপর টান 17.75 N

আবার টানের মান 4 গুণ করা হলে $F_1 = 4F$ হয়; সেক্ষেত্রে রৈখিক বেগ v_1 হলে $F_1 = \frac{mv_1^2}{r}$ এবং $F = \frac{mv^2}{r}$ হলে

$$\frac{F_1}{F} = \frac{v_1^2}{v^2} = \left(\frac{v_1}{v}\right)^2 = 4$$

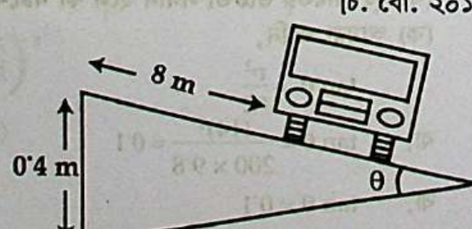
$\therefore \quad \frac{v_1}{v} = 2$ বা, $v_1 = 2v$

অর্থাৎ টান 4 গুণ করা হলে রৈখিক বেগ দ্বিগুণ বৃদ্ধি পায়।

৬। 100 m ব্যাসার্ধের একটি বাঁকে 30 kmh⁻¹ বেগে বাঁক নিতে গিয়ে বাস রাস্তা থেকে ছিটকে খাদে পড়ে যায়। [চ. বো. ২০১৬]

(ক) উদ্দীপকে উল্লিখিত রাস্তার ব্যাংকিং কোণ নির্ণয় কর।

(খ) উদ্দীকের আলোকে বাসটি খাদে পড়ে যাওয়ার কারণ গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ কর।



(ক) আমরা জানি, θ এর মান খুব ছোট হলে,

$\tan\theta = \sin\theta = \frac{h}{d}$

$\therefore \quad \theta = \sin^{-1}\frac{h}{d} = \sin^{-1}\frac{0.4}{8} = 2.86°$

(খ) নিরাপদে গাড়ি চালানোর জন্য ব্যাঙ্কিং কোণ θ হলে,

$$\tan\theta = \frac{v^2}{rg}$$

বা, $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{v^2}{rg}\right) = \tan^{-1}\left\{\frac{(8{\cdot}33)^2}{100 \times 9{\cdot}8}\right\} = 4{\cdot}05°$

উদ্দীপকের রাস্তায় ব্যাঙ্কিং কোণ 2·86° কিন্তু ওই পথে 30 kmh^{-1} বেগে নিরাপদে গাড়ি চালানোর জন্য ব্যাঙ্কিং কোণ হওয়া প্রয়োজন ছিল 4·05°। তাই গাড়িটি খাদে পড়ে যায়।

৭। একজন সার্কাস খেলোয়াড় মাথার উপর উল্লম্ব তলে কোনো বস্তুকে ঘুরাচ্ছে। সুতার দৈর্ঘ্য 90 cm এবং বস্তুটি প্রতি মিনিটে 100 বার ঘুরানো হচ্ছে। হঠাৎ করে ঘূর্ণায়মান বস্তুটির এক-তৃতীয়াংশ খুলে পড়ে গেল। এতে খেলোয়াড় ভীত না হয়ে প্রতি মিনিটে ঘূর্ণন সংখ্যা একই রাখার জন্য সুতার দৈর্ঘ্য বাড়িয়ে দিল।

(ক) বস্তুটির ভর কমে যাবার পূর্বে এর কেন্দ্রমুখি ত্বরণ কত ছিল?

(খ) সার্কাস খেলোয়াড় সুতার দৈর্ঘ্যের যে পরিবর্তন এনেছিল গাণিতিক বিশ্লেষণের মাধ্যমে তার সঠিকতা যাচাই কর।

(ক) আমরা জানি,

কৌণিক বেগ, $\omega = \frac{2\pi N}{t} = \frac{2\pi \times 100}{60} = 10{\cdot}472$ rad s^{-1} এবং

কেন্দ্রমুখি ত্বরণ, $a = \omega^2 r = (10{\cdot}472)^2 \times 0{\cdot}9 = 9{\cdot}87$ ms^{-2}

এখানে,
$N = 100$ বার
$t = 1$ min $= 60$ sec
$r = 90$ cm $= 0{\cdot}9$ m

(খ) খেলোয়াড়ের হাত দ্বারা প্রযুক্ত টান বা কেন্দ্রমুখি বল অপরিবর্তিত থাকে।

কেন্দ্রমুখি বল বা সুতার টান $F_C = ma = m \times 98{\cdot}7 = 98{\cdot}7$ mN

ভর এক-তৃতীয়াংশ কমে গেলে অবশিষ্ট ভর $m' = m - \frac{m}{3} = \frac{2m}{3}$

এক্ষেত্রে সুতার নতুন দৈর্ঘ্য r' হলে

$m'\omega^2 r' = m\omega^2 r$ হয়

বা, $m'r' = mr$

বা, $r' = \frac{mr}{m'} = \frac{mr}{2m/3} = \frac{3}{2}r$

সুতরাং, দৈর্ঘ্য পরিবর্তন $= \frac{3r}{2} - r = \frac{r}{2}$

বা, পূর্বের দৈর্ঘ্যের 50% বৃদ্ধি করেছিল।

৮। 40 kg ও 60 kg ভরের দুটি বস্তু যথাক্রমে 10 ms^{-1} এবং 5 ms^{-1} বেগে পরস্পর বিপরীত দিক থেকে আসার সময় একে অপরকে ধাক্কা দিল। ধাক্কার পর বস্তুদ্বয় একত্রে থেকে চলতে থাকল।

(ক) মিলিত বস্তুর বেগ কত?

(খ) সংঘর্ষটি স্থিতিস্থাপক নয় কেন? গাণিতিক বিশ্লেষণের মাধ্যমে মতামত দাও।

(ক) আমরা জানি,

$m_1u_1 + m_2u_2 = (m_1 + m_2)v$

বা, $40 \times 10 - 60 \times 5 = (40 + 60)v$

$\therefore\ v = \frac{100}{100} = 1$ ms^{-1}

দিক 10 ms^{-1} বেগের দিকে

এখানে,
$m_1 = 40$ kg
$m_2 = 60$ kg
$u_1 = 10$ ms^{-1}
$u_2 = -5$ ms^{-1}
v = মিলিত বস্তুর বেগ = ?

(খ) আমরা জানি, স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষে ভরবেগ ও গতিশক্তি উভয়ই সংরক্ষিত থাকে, কিন্তু অস্থিতিস্থাপক সংঘর্ষে ভরবেগ সংরক্ষিত থাকলেও গতিশক্তি সংরক্ষিত থাকে না, গতিশক্তি অন্য শক্তিতে রূপান্তরিত হয়।

সংঘর্ষের পূর্বে বস্তুদ্বয়ের মোট গতিশক্তি,

$$\frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 = \frac{1}{2} \times 40 \times 10^2 + \frac{1}{2} \times 60\,(-5)^2$$
$$= (2000 + 750)\ J$$
$$= 2750\ J$$

∴ সংঘর্ষের পূর্বে বস্তুদ্বয়ের একত্রে গতিশক্তি, $\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 = \frac{1}{2} \times 100 \times (1)^2 = 50\text{ J}$

এক্ষেত্রে সংঘর্ষের পূর্বে ও পরে গতিশক্তি সংরক্ষিত হয়নি। সুতরাং সংঘর্ষটি স্থিতিস্থাপক নয়।

৯। রাস্তার কোনো এক বাঁকের ব্যাসার্ধ 50 m এবং রাস্তার উভয় পার্শ্বের উচ্চতার পার্থক্য 0·5 m; রাস্তার প্রস্থ 5 m।

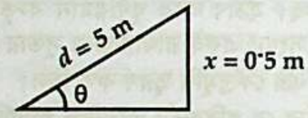
(ক) রাস্তার প্রকৃত ব্যাঙ্কিং কোণ কত ?

(খ) উদ্দীপকের রাস্তায় 108 kmh^{-1} বেগে একটি গাড়ি নিরাপদে চালানো সম্ভব কি না ? —গাণিতিকভাবে যাচাই কর। [রা. বো. ২০১৭]

(ক) আমরা জানি,

$$\sin\theta = \frac{x}{d} = \frac{0·5}{5}$$

$$\therefore \quad \theta = \sin^{-1}\left(\frac{0·5}{5}\right) = 5·74°$$



এখানে,
রাস্তার প্রস্থ, $d = 5\text{ m}$
রাস্তার উভয় পার্শ্বের উচ্চতার পার্থক্য $x = 0·5\text{ m}$
ব্যাঙ্কিং কোণ, $\theta = ?$

(খ) আমরা (ক) অংশ হতে পাই, $\theta = 5·74°$

উদ্দীপক অনুসারে, রাস্তার বাঁকের ব্যাসার্ধ, $r = 50\text{ m}$

গাড়ির সর্বোচ্চ বেগ v হলে $\tan\theta = \frac{v^2}{rg}$

$$\therefore v^2 = \tan\theta \times rg$$

$$v = \sqrt{\tan\theta \times rg}$$

$$= \sqrt{\tan(5·74) \times 50 \times 9·8}$$

$$= 7·02\text{ ms}^{-1} = 25·27\text{ kmh}^{-1}$$

অর্থাৎ এই রাস্তায় সর্বোচ্চ $25·27\text{ kmh}^{-1}$ বেগে গাড়ি নিরাপদে চালানো সম্ভব।

অতএব, উদ্দীপকের রাস্তায় 108 kmh^{-1} বেগে একটি গাড়ি নিরাপদে চালানো সম্ভব নয়।

১০। নয়ন 25 g ভরের একটি পাথর খণ্ডকে 1 m দীর্ঘ একটি সুতার সাহায্যে বৃত্তাকার পথে ঘুরাচ্ছে। পাথর খণ্ডটি প্রতি সেকেন্ডে 5 বার ঘুরছে। পাথরের ঘূর্ণন সংখ্যা একই রেখে সুতার দৈর্ঘ্য দ্বিগুণ করা হলো। সুতা সর্বাধিক 40 N বল সহ্য করতে পারে।

(ক) প্রথম ক্ষেত্রে পাথরটির কৌণিক ভরবেগ নির্ণয় কর।

(খ) নয়ন সুতার দৈর্ঘ্য দ্বিগুণ করে ঘূর্ণন সফলভাবে সম্পন্ন করতে পারবে কি না—গাণিতিকভাবে যাচাই কর। [সি. বো. ২০১৭]

(ক) আমরা জানি, কৌণিক ভরবেগ,

$$L = mvr = mr^2\omega$$

$$= mr^2 \times \frac{2\pi N}{t} \qquad \left[\because \omega = \frac{2\pi N}{t}\right]$$

$$= \frac{25 \times 10^{-3} \times (1)^2 \times 2 \times 3·1416 \times 5}{1}$$

$$= 0·7854\text{ kgm}^2\text{s}^{-1}$$

এখানে,
সুতার দৈর্ঘ্য, $r = 1\text{ m}$
পাথর খণ্ডের ভর, $m = 25\text{ g} = 25 \times 10^{-3}\text{ kg}$
সময়, $t = 1\text{ sec}$
ঘূর্ণন সংখ্যা $= N = 5$
কৌণিক ভরবেগ, $L = ?$

(খ) সুতার পরিবর্তিত দৈর্ঘ্য তথা পরিবর্তিত ব্যাসার্ধ,

$$r = 2 \times 1 = 2\text{ m}$$

সুতার সর্বাধিক সহনশীল বল, $F = 40\text{ N}$

$$\therefore \quad \text{কৌণিক বেগ, } \omega = \frac{2\pi N}{t} = \frac{2 \times 3·1416 \times 5}{1} = 31·416\text{ rads}^{-1}$$

$$\therefore \quad \text{কেন্দ্রমুখি বল, } F' = m\omega^2 r = 25 \times 10^{-3} \times (31·416)^2 \times 2 = 49·348\text{ N}$$

∴ কেন্দ্রমুখি বল বা সুতার টান F' সুতার সর্বাধিক সহনশীল বল F অপেক্ষা বড়। সুতরাং নয়ন সুতার দৈর্ঘ্য দ্বিগুণ করে সফলভাবে ঘূর্ণন সম্পন্ন করতে পারবে না। কারণ সুতার টান বেশি হওয়ায় সুতাটি ছিঁড়ে যাবে।

১১। মিটারগেজ ও ব্রডগেজ রেল লাইনের দুটি পাতের মধ্যবর্তী দূরত্ব যথাক্রমে 0·8 m ও 1·3 m। যে স্থানে বাঁকের ব্যাসার্ধ 500 m, ওই স্থানে লাইনগুলোর মধ্যে উচ্চতার পার্থক্য যথাক্রমে 7 cm এবং 11·37 cm.

(ক) ১ম লাইনের ব্যাঙ্কিং কোণ কত ?

(খ) কোন লাইনে রেলগাড়ি অধিক দ্রুততার সাথে বাঁক নিতে পারবে—গাণিতিক বিশ্লেষণসহ মন্তব্য কর।

[সি. বো. ২০১৭]

(ক) আমরা জানি,

$$\tan\theta = \frac{h}{l} = \frac{0.07}{0.8} = 0.0875$$

$\therefore \quad \theta = \tan^{-1}(0.0875) = 5°$

$\therefore$ ১ম লাইনের ব্যাঙ্কিং কোণ = 5°

এখানে,
উচ্চতা, $h = 7\text{ cm} = 0.07\text{ m}$
মিটার গেজের দুটি লাইনের মধ্যবর্তী দূরত্ব, $l = 0.8\text{ m}$
ব্যাঙ্কিং কোণ, $\theta = ?$

(খ) ২য় লাইনের ব্যাঙ্কিং কোণ,

$$\theta_2 = \tan^{-1}\left(\frac{h'}{l'}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{0.1137}{1.3}\right) = 5°$$

আবার ১ম লাইনে গাড়ির সর্বোচ্চ বেগ v_1 এবং ২য় লাইনে গাড়ির সর্বোচ্চ বেগ v_2 হলে,

$$\tan\theta_1 = \frac{v_1^2}{rg} \text{ এবং } \tan\theta_2 = \frac{v_2^2}{rg}$$

$$\therefore \quad \frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2} = \frac{v_1^2}{v_2^2}$$

এখানে,
বাঁকের ব্যাসার্ধ, $r = 500\text{ m}$
অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g = 9.8\text{ ms}^{-2}$
১ম লাইনের ব্যাংকিং কোণ, $\theta_1 = 5°$
২য় লাইনের মধ্যবর্তী দূরত্ব, $l' = 1.3$
ব্রডগেজ দুটির উচ্চতার পার্থক্য, $h' = 11.37\text{ cm} = 0.1137\text{ m}$
২য় লাইনের ব্যাঙ্কিং কোণ, $\theta_2 = ?$

যেহেতু $\theta_1 = \theta_2$ সেহেতু $v_1 = v_2$। অর্থাৎ দুটি লাইনে রেলগাড়ি সমান দ্রুততার সাথে বাঁক নিতে পারবে।

১২। 60 kg ভরের একজন নৃত্যশিল্পী দুহাত প্রসারিত করে মিনিটে 20 বার ঘুরতে পারেন। তিনি একটি সংগীত এর তালে তাল মেলানোর চেষ্টা করেন।

(ক) নৃত্যশিল্পীকে সংগীত এর সাথে ঐক্যতানিক হতে মিনিটে 30 বার ঘুরালে জড়তার ভ্রামকদ্বয়ের তুলনা কর।

(খ) উদ্দীপকের নৃত্যশিল্পীর পরিবর্তিত কৌণিক গতিশক্তি দ্বিগুণ হবে কী ? বিশ্লেষণপূর্বক মতামত দাও।

[ব. বো. ২০১৭]

(ক) ধরা যাক,

প্রথম ক্ষেত্রে নৃত্যশিল্পীর জড়তার ভ্রামক I_1 এবং কৌণিক বেগ ω_1 এবং দ্বিতীয় ক্ষেত্রে জড়তার ভ্রামক I_2 এবং কৌণিক বেগ ω_2

$$\therefore \quad \omega_1 = \frac{2\pi n_1}{60} = \frac{2\pi \times 20}{60} = \frac{2}{3}\pi \text{ rads}^{-1}$$

$$\text{এবং } \omega_2 = \frac{2\pi n_2}{60} = \frac{2\pi \times 30}{60} = \pi \text{ rads}^{-1}$$

এখানে,
প্রথম ক্ষেত্রে,
প্রতি মিনিটে নৃত্যশিল্পীর ঘূর্ণন সংখ্যা, $n_1 = 20$
দ্বিতীয় ক্ষেত্রে,
প্রতি মিনিটে নৃত্যশিল্পীর ঘূর্ণন সংখ্যা, $n_2 = 30$

আবার কৌণিক ভরবেগের সংরক্ষণশীলতার সূত্রানুসারে,

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2$$

$$\therefore \quad I_2 = \frac{\omega_1}{\omega_2} \times I_1 = \frac{\frac{2}{3}\pi}{\pi} \times I_1 = \frac{2}{3} I_1$$

সুতরাং দ্বিতীয় ক্ষেত্রে জড়তার ভ্রামক প্রথম ক্ষেত্রের $\frac{2}{3}$ গুণ হবে।

(খ) ১ম ক্ষেত্রে কৌণিক কম্পাঙ্ক, $\omega_1 = \frac{2}{3}\pi \text{ rads}^{-1}$

১ম ক্ষেত্রে জড়তার ভ্রামক, I_1

পরিবর্তিত জড়তার ভ্রামক, $I_2 = \frac{2}{3} I_1$

সুতরাং ১ম ক্ষেত্রে কৌণিক গতিশক্তি, $E_1 = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2$

এবং পরিবর্তিত কৌণিক গতিশক্তি, $E_2 = \frac{1}{2} I_2 \omega_2{}^2$

$$\therefore \frac{E_2}{E_1} = \frac{\frac{1}{2} I_2 \omega^2}{\frac{1}{2} I_1 \omega^2} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} I_1 \times \pi^2}{\frac{1}{2} \times I_1 \times \left(\frac{2}{3}\pi\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{3} I_1 \pi^2}{\frac{2}{9} I_1 \pi^2} = \frac{9}{6} = 1{\cdot}5$$

$$\therefore \quad E_2 = \frac{3}{2} \times E_1 = 1{\cdot}5\, E_1$$

অতএব নৃত্যশিল্পীর পরিবর্তিত কৌণিক গতিশক্তি দ্বিগুণ হবেনা বরং 1·5 গুণ হবে।

১৩। অনিক 0·6 kg ভরের একটি গোলককে ভূমি থেকে 2 m ওপরে অনুভূমিক তলে 2·2 m রশির সাহায্যে ঘোরাচ্ছে। গোলকটি প্রতি মিনিটে 25 বার আবর্তন করে। ঘূর্ণায়মান অবস্থায় হঠাৎ রশিটি ছিঁড়ে গেল।

(ক) চক্রগতির ব্যাসার্ধ কাকে বলে ?

(খ) ক্রিকেট খেলায় ক্যাচ ধরার সময় খেলোয়াড় হাতটাকে পিছনে টেনে নেয় কেন ? ব্যাখ্যা কর।

(গ) উদ্দীপকের আলোকে কেন্দ্রমুখি বলের মান নির্ণয় কর।

(ঘ) অনিকের গোলকটি 4 m দূরে অবস্থিত একটা দেওয়ালে আঘাত করবে কি না—গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ কর।

(ক) চক্রগতির ব্যাসার্ধ : যদি কোনো দৃঢ় বস্তুর একটি নির্দিষ্ট বিন্দু যেখানে বস্তুটির সমস্ত ভর কেন্দ্রীভূত আছে ধরা হয় এবং ঘূর্ণন অক্ষ সাপেক্ষে ওই বিন্দুতে জড়তার ভ্রামক সমগ্র বস্তুটির জড়তার ভ্রামকের সমান হয়, তবে অক্ষ হতে ওই বিন্দুর দূরত্বকে চক্রগতির ব্যাসার্ধ বলা হয়।

(খ) নিউটনের দ্বিতীয় সূত্রানুসারে প্রযুক্ত বল কম হলে ত্বরণ কম হবে। বেগের পরিবর্তন ধ্রুব হলে, ওই পরিবর্তনে যত বেশি সময় নেওয়া হবে, ত্বরণের মান তত কম হবে। তাই ক্রিকেট খেলায় ক্যাচ ধরার সময় খেলোয়াড় হাতটাকে পিছনে টেনে নেয়, যাতে বেগের নির্দিষ্ট পরিবর্তনে বেশি সময় লাগে, ফলে ত্বরণ এবং প্রতিক্রিয়া বল কম মানের হয়।

(গ) আমরা জানি, কেন্দ্রমুখি বল,

$$F = m\omega^2 r$$

$$\text{বা,}\quad F = m\left(\frac{2\pi N}{t}\right)^2 r \qquad \left[\because \omega = \frac{2\pi N}{t}\right]$$

$$= 0{\cdot}6 \times \left(\frac{2 \times 3{\cdot}14 \times 25}{60}\right)^2 \times 2{\cdot}2\,\text{N}$$

$$= 9{\cdot}04\,\text{N}$$

এখানে,
গোলকের ভর, $m = 0{\cdot}6$ kg
রশির দৈর্ঘ্য, $r = 2{\cdot}2$ m
ঘূর্ণন সংখ্যা, $N = 25$
সময়, $t = 1$ min $= 60$ s
উচ্চতা, $y = 2$ m

(ঘ) আমরা জানি,

$$y = \frac{1}{2} g t^2$$

$$\text{বা,}\quad t^2 = \frac{2y}{g}$$

$$\therefore \quad t = \sqrt{\frac{2y}{g}} = \sqrt{\frac{2 \times 2}{9{\cdot}8}} = 0{\cdot}64\,\text{s}$$

আবার, $x = vt$

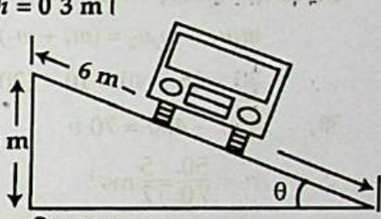
$$\text{বা,}\quad x = \omega r t = \left(\frac{2\pi N}{t'}\right) rt \qquad [\because v = \omega r]$$

এখানে, $t' = 1$ mn $= 60$ s, $N = 25$, $r = 2{\cdot}2$, $t = 0{\cdot}64$ s

$$\therefore \quad x = \left(\frac{2 \times 3{\cdot}14 \times 25}{60}\right) \times 2{\cdot}2 \times 0{\cdot}64 = 3{\cdot}68\,\text{m}$$

অনিকের গোলকটা 3·68 m দূরে গিয়ে পড়বে। কিন্তু দেওয়ালটি 4 m দূরে রয়েছে, তাই গোলকটা দেওয়ালকে আঘাত করবে না।

১৪। 80 m ব্যাসার্ধের একটি বাঁকে 40 kmh^{-1} বেগে বাঁক নেওয়ার সময় একটি গাড়ি রাস্তা থেকে ছিটকে নিচে পড়ে যায়। উদ্দীপকে রাস্তার দুই প্রান্তের মধ্যবর্তী দূরত্ব $d = 6$ m এবং উচ্চতা, $h = 0.3$ m।



(ক) ঘাত বল কী ?

(খ) বাঁকা পথে সাইকেল চালাতে হলে সাইকেলসহ আরোহীকে বৃত্তের কেন্দ্রের দিকে হেলতে হয় কেন ? ব্যাখ্যা কর।

(গ) উদ্দীপকে উল্লেখিত রাস্তার ব্যাংকিং কোণ কত ?

(ঘ) উদ্দীপকের আলোকে গাড়িটি নিচে পড়ে যাওয়ার কারণ গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ কর।

(ক) ঘাত বল : খুব অল্প সময়ের জন্য খুব বড় মানের যে বল কোনো বস্তুর ওপর প্রযুক্ত হয় তাকে ঘাত বল বলে।

(খ) সোজা পথে বাঁক নিতে গেলে উল্টে যাওয়ার সম্ভাবনা থাকে। বৃত্তাকার পথে সাইকেলসহ আরোহীকে বৃত্তের কেন্দ্রের দিকে অনুভূমিক বরাবর একটি কেন্দ্রমুখি বলের প্রয়োজন হয়। এই কেন্দ্রমুখি বলের যোগান দিতে সাইকেলসহ আরোহীকে বাঁকের কেন্দ্রের দিকে হেলতে হয়।

(গ) ধরা যাক, ব্যাঙ্কিং কোণ θ

আমরা জানি, $\sin\theta = \frac{h}{d}$

বা, $\theta = \sin^{-1}\left(\frac{h}{d}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{0.3\text{ m}}{6\text{m}}\right) = 2.9°$

সুতরাং রাস্তার ব্যাঙ্কিং কোণ 2.9°

(ঘ) এখানে বাঁকের ব্যাসার্ধ, $r = 80$ m, গাড়ির বেগ, $v = \frac{40 \times 1000}{60 \times 60} = 11.11\ ms^{-1}$, $g = 9.8\ ms^{-2}$

রাস্তার ব্যাঙ্কিং কোণ, $\theta = 2.9°$

মনে করি, ব্যাঙ্কিং কোণ অনুসারে গাড়ির সর্বোচ্চ বেগ, v'

আমরা জানি,

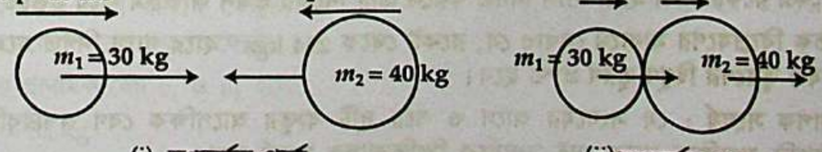
$$\tan\theta = \frac{v'^2}{rg}$$

বা, $v'^2 = rg\tan\theta = 80 \times 9.8 \times \tan 2.9 = 39.7$

$\therefore\ v' = \sqrt{39.7} = 6.3\ ms^{-1}$

এখানে গাড়ির বেগ 11.11 ms^{-1} যা বাঁকের সর্বোচ্চ গতিসীমা 6.3 ms^{-1} এর বেশি। তাই গাড়িটি নিচে পড়ে গিয়েছিল।

১৫। একই সরলরেখায় দুটি বস্তুর সংঘর্ষের চিত্র নিম্নরূপ—



(i) সংঘর্ষের পূর্বে (ii) সংঘর্ষের পর

(ক) বলের ঘাত কী ?

(খ) একটি দেওয়ালে একটি বল ধাক্কা খেয়ে পিছনে ফিরে আসে কেন ? ব্যাখ্যা কর।

(গ) উদ্দীপকে বর্ণিত সংঘর্ষের পর বস্তু দুটির মিলিত বেগ নির্ণয় কর।

(ঘ) উদ্দীপকে উল্লেখিত সংঘর্ষ অস্থিতিস্থাপক সংঘর্ষ—গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ কর।

(ক) বলের ঘাত : কোনো বল ও বলের ক্রিয়ার গুণফলকে ওই বলের ঘাত বলে।

(খ) দুটি বস্তুর মধ্যে স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষের পর প্রথম বস্তুর বেগ,

$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{01} + \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right) \times v_{02}$। দেওয়ালের সাথে বলের সংঘর্ষের ক্ষেত্রে $v_{02} = 0$ হয় এবং $m_2 >> m_1$। সুতরাং, $v_1 = -v_{01}$ এবং $v_{02} = 0$ অর্থাৎ দেওয়াল স্থির থাকবে এবং বলটি একই বেগে বিপরীত দিকে ফিরে আসবে।

(গ) চিত্র অনুযায়ী, আমরা জানি,

$m_1u_1 - m_2u_2 = (m_1 + m_2)\,v$

$30 \times 15 - 40 \times 10 = (30 + 40)\,v$

বা, $450 - 400 = 70\,v$

$\therefore\ v = \frac{50}{70} = \frac{5}{7}\,ms^{-1}$

এখানে,
$m_1 = 30$ kg
$u_1 = 15\ ms^{-1}$
$m_2 = 40$ kg
$u_2 = 10\ ms^{-1}$
মিলিত বেগ, $v = ?$

(ঘ) আমরা জানি, অস্থিতিস্থাপক সংঘর্ষের ক্ষেত্রে বস্তুগুলোর সংঘর্ষের পর বস্তুর মোট গতিশক্তি সংরক্ষিত হয় না।

উদ্দীপকে সংঘর্ষের পূর্বে গতিশক্তি $= \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2$

$= \frac{1}{2} \times 30 \times (15)^2 + \frac{1}{2} \times 40 \times (10)^2$

$= 15 \times 225 + 20 \times 100$

$= 3375 + 2000 = 5375$ J

সংঘর্ষের পরে গতিশক্তি $= \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$

$= \frac{1}{2}m_1v^2 + \frac{1}{2}m_2v^2$

$= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\,v^2 \qquad [\because v_1 = v_2 = v]$

$= \frac{1}{2}(30 + 40) \times \left(\frac{5}{7}\right)^2$

$= 35 \times \frac{25}{49} = 17.86$ J

দেখা যাচ্ছে উভয় ক্ষেত্রে গতিশক্তি সমান নয়। সুতরাং উদ্দীপকের সংঘর্ষটি অস্থিতিস্থাপক।

১৬। 10000 kg ভরের একটি রকেটকে উল্লম্বভাবে উৎক্ষেপণ করতে হবে। জ্বালানি দহনে উৎপন্ন গ্যাসের বেগ 1000 ms^{-1}।

(ক) স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষ কাকে বলে ?

(খ) দেখাও যে, সমকৌণিক বেগে ঘূর্ণনরত কোনো বস্তুর জড়তার ভ্রামক এর কৌণিক ভরবেগের সমান।

(গ) উদ্দীপকের রকেটটি কী হারে গ্যাস নির্গত করলে এটি নিজের ওজন অতিক্রম করে উড়তে সমর্থ হবে ?

(ঘ) গাণিতিক বিশ্লেষণের মাধ্যমে দেখাও যে, রকেট থেকে 294 kgs^{-1} হারে গ্যাস নির্গত হলে রকেটটি শুরুতে অভিকর্ষজ ত্বরণের দ্বিগুণ ত্বরণ প্রাপ্ত হবে।

(ক) স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষ : যে সংঘর্ষের আগে ও পরে দুটি বস্তুর আপেক্ষিক বেগ অপরিবর্তিত থাকে অর্থাৎ বস্তুদ্বয়ের মোট গতিশক্তি সংরক্ষিত থাকে সেই সংঘর্ষকে স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষ বলে।

(খ) আমরা জানি, ঘূর্ণন গতির ক্ষেত্রে কৌণিক ভরবেগ = জড়তার ভ্রামক × কৌণিক বেগ, বা $L = I\omega$। কৌণিক বেগের মান এক একক হলে অর্থাৎ $\omega = 1$ হলে $L = 1$ হয়। তাই সমকৌণিক বেগে ঘূর্ণনরত বস্তুর জড়তার ভ্রামক এর কৌণিক ভরবেগের সমান।

(গ) রকেটটি নিজের ওজনকে ছাপিয়ে ঠিক উড়তে সমর্থ হবে যদি জ্বালানি দহনে উৎপন্ন গ্যাসের নির্গমনের ফলে উৎপন্ন ঘাত রকেটের ওজনের সমান হয়। অর্থাৎ,

$u\frac{dm}{dt} = mg$ হয়।

$\therefore\ \frac{dm}{dt} = \frac{mg}{u} = \frac{10000 \times 9.8}{1000}\,kgs^{-1} = 98\,kgs^{-1}$

$\therefore$ জ্বালানি দহনের ন্যূনতম হার হবে 98 kgs^{-1}

(ঘ) রকেটের উর্ধ্বমুখি ত্বরণ a হলে, আমরা জানি,

$$ma = m\frac{dv}{dt} = u\frac{dm}{dt} - mg$$

বা, $a = \frac{u}{m} \cdot \frac{dm}{dt} - g$

বা, $\frac{dm}{dt} = \frac{m}{u}(a+g)$

প্রশ্নানুসারে, $a = 2g$

$$\therefore \quad \frac{dm}{dt} = \frac{m}{u} \times 3g = \frac{10000}{1000} \times 3 \times 9.8 \text{ kgs}^{-1}$$
$$= 294 \text{ kgs}^{-1}$$

$\therefore$ 294 kgs^{-1} হারে রকেট থেকে গ্যাস নির্গত হলে শুরুতে এর ত্বরণ অভিকর্ষজ ত্বরণের দ্বিগুণ হবে।

১৭। 100 ms^{-1} গতিবেগসহ একটি 50 kg ভরের গোলাকে খাড়া ওপরের দিকে নিক্ষেপ করা হলো। 6 sec পরে গোলাটি বিস্ফোরণের ফলে দুই টুকরা হয়ে গেল। 18 kg ভরের একটি টুকরা 80 ms^{-1} বেগে খাড়া ওপরের দিকে ছুটে গেল।

(ক) বস্তুর জড়তা কী ?

(খ) রৈখিক ভরবেগের নিত্যতা সূত্রটি ব্যাখ্যা কর।

(গ) উদ্দীপকের গোলার 6 sec পরে বিস্ফোরণের ঠিক পূর্বে উর্ধ্বমুখি বেগ নির্ণয় কর।

(ঘ) বিস্ফোরণের ফলে ভরবেগের সংরক্ষণসূত্র প্রযোজ্য হবে কী ? দ্বিতীয় টুকরাটি কত বেগে কোন দিকে ধাবিত হবে—গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ কর।

(ক) বস্তুর জড়তা : বস্তুর ওপর কোনো বল প্রয়োগ না করলে স্থির বস্তু চিরকাল স্থির থাকতে চায় এবং গতিশীল বস্তু চিরকাল সমবেগে চলতে চায়। এই ধর্মই বস্তুর জড়তা।

(খ) কোনো বস্তুর ওপর বাহ্যিক বল প্রযুক্ত না হলে ভরবেগের কোনো পরিবর্তন হবে না। অর্থাৎ ভরবেগ সংরক্ষিত থাকে। এটিই ভরবেগের সংরক্ষণ নীতি।

ব্যাখ্যা : কোনো আরোহী নৌকা থেকে লাফিয়ে নামলে নৌকাটি পিছিয়ে যায়। লাফ দেওয়ার আগে নৌকা ও আরোহী স্থির ছিল বলে ওদের ভরবেগ শূন্য ছিল। আরোহী সচল হলে ভরবেগ লাভ করে। ভরবেগের সংরক্ষণ নীতি অনুযায়ী মোট ভরবেগ শূন্য থাকে। তাই নৌকাটিতে সমান ও বিপরীতমুখি ভরবেগ সৃষ্টি হয়। ফলে নৌকাটি সচল হয়ে পিছিয়ে যায়।

(গ) 6 sec পরে বিস্ফোরণের ঠিক পূর্বে গোলার উর্ধ্বমুখি বেগ,

$$v = u - gt = 80 - 9.8 \times 6 = 80 - 58.8 = 21.2 \text{ ms}^{-1}$$

(ঘ) বিস্ফোরণের সময় বাহ্যিক কোনো বল প্রয়োগ করা হয় না। যে বল উৎপন্ন হয় তা গোলার অভ্যন্তরীণ বল। তাই এখানে ভরবেগের সংরক্ষণসূত্র প্রযোজ্য।

টুকরা দুটির প্রাথমিক বেগ v_1 ও v_2 হলে,

$(50 - 18) = 32$ kg

এখন প্রথম টুকরটি 18 kg হলে দ্বিতীয় টুকরার ভর,

$$m_1v_1 + m_2v_2 = mv$$

$$\therefore \quad 18 \times 80 + 32 \times v_2 = 50 \times 21.2$$

বা, $$v_2 = \frac{50 \times 21.2 - 18 \times 80}{32}$$
$$= \frac{1060 - 1440}{32}$$
$$= -\frac{380}{32} = -11.9 \text{ ms}^{-1}$$

ঋণাত্মক চিহ্নের অর্থ হলো যে 32 kg ভরের টুকরাটি বিস্ফোরণের পর খাড়া নিচের দিকে নামে এবং নামার সময় প্রাথমিক বেগ 11.9 ms^{-1}।

১৮। কোনো একটি সরলরেখায় $10\ ms^{-1}$ বেগে চলমান $2\ kg$ ভরের একটি বস্তু একই দিকে সরলরেখায় $2\ ms^{-1}$ বেগে চলমান $10\ kg$ ভরের অপর একটা বস্তুকে ধাক্কা দিল এবং ধাক্কার পর বস্তু দুটি একই দিকে যুক্ত অবস্থায় চলতে থাকল।

(ক) কৌণিক ভরবেগ কাকে বলে ?

(খ) একটি ঢিলকে উল্লম্বভাবে ওপরের দিকে ছুঁড়লে সেটি গতিপথের সর্বোচ্চ বিন্দুতে ক্ষণিকের জন্য থামে। ঢিলটি কী ওই সময় সাম্যে থাকে ? ব্যাখ্যা কর।

(গ) যুক্ত অবস্থায় উদ্দীপকের বস্তু দুটির বেগ নির্ণয় কর।

(ঘ) সংঘর্ষের পূর্বে ও পরে বস্তু দুটির ভরবেগ ও গতিশক্তি সংরক্ষিত থাকে কি–না, গাণিতিভাবে তোমার মতামত দাও।

(ক) কৌণিক ভরবেগ : ঘূর্ণনরত কোনো বস্তু কণার ব্যাসার্ধ ভেক্টর ও রৈখিক ভরবেগের ভেক্টর গুণফলকে কৌণিক ভরবেগ বলে।

(খ) ঢিলটি তার উর্ধ্বগতিপথের সর্বোচ্চ বিন্দুতে ক্ষণিকের জন্য স্থির থাকলেও সাম্যে থাকে না। কেননা সর্বোচ্চ বিন্দুতে বস্তুর ত্বরণ শূন্য নয়। এই বস্তুর ওপর পৃথিবীর আকর্ষণ জনিত ত্বরণ নিচের দিকে ক্রিয়া করে। একটি বস্তু তখনই সাম্যে থাকে যখন বস্তুর মোট ত্বরণ শূন্য হয়।

(গ) আমরা জানি,

$$m_1v_{01} + m_2v_{02} = (m_1 + m_2)\,v$$

বা, $2 \times 10 + 10 \times 2 = (2 + 10)\,v$

বা, $v = \frac{20 + 20}{12} = \frac{40}{12} = \frac{10}{3}\ ms^{-1}$

এখানে,
$m_1 = 2\ kg$
$v_{01} = 10\ ms^{-1}$
$m_2 = 20\ kg$
$v_{02} = 2\ ms^{-1}$
যুক্ত অবস্থায় তাদের বেগ $= v$

(ঘ) সংঘর্ষের পূর্বে বস্তুদ্বয়ের ভরবেগ $= m_1v_{01} + m_2v_{02}$

$= 2 \times 10 + 10 \times 2$

$= 40\ kgms^{-1}$

সংঘর্ষের পরে বস্তুদ্বয়ের ভরবেগ $= (m_1 + m_2)\,v$

$= (2 + 10) \times \frac{10}{3}$

$= \frac{12 \times 10}{3}$

$= 40\ kgms^{-1}$

$\therefore$ সংঘর্ষের পূর্বে ও পরে ভরবেগ একই থাকে, অর্থাৎ ভরবেগ সংরক্ষিত হয়।

সংঘর্ষের পূর্বে গতিশক্তি $= \frac{1}{2} m_1v_{01}^2 + m_2v_{02}^2$

$= \frac{1}{2} \times 2 \times (10)^2 + \frac{1}{2} \times 10 \times (2)^2$

$= 100 + 20 = 120\ J$

সংঘর্ষের পরে গতিশক্তি $= \frac{1}{2}\,(m_1 + m_2)\,v^2$

$= \frac{1}{2}(2 + 10) \times \left(\frac{10}{3}\right)^2$

$= 6 \times \frac{100}{9} = \frac{200}{3} \simeq 67\ J$

এখানে সংঘর্ষের পূর্বে ও পরে গতিশক্তি সমান নয়।

সুতরাং গতিশক্তি সংরক্ষিত হয় না।

সার-সংক্ষেপ

বল : যে বাহ্যিক কারণ বস্তুর গতি বা স্থিতি অবস্থার পরিবর্তন ঘটায় বা ঘটাতে চায় তাকে বল বলে।

মৌলিক বল : যে সকল বল মূল বা অকৃত্রিম অর্থাৎ অন্য কোনো বল থেকে উৎপন্ন হয় না তাকে মৌলিক বল বলে।

মৌলিক বলের প্রকারভেদ : মৌলিক বল চার ধরনের। যথা—মহাকর্ষ বল, তড়িৎ-চুম্বকীয় বল, সবল নিউক্লিয় বল ও দুর্বল নিউক্লিয় বল।

ভরবেগ : বস্তুর ভর ও বেগের সমন্বয়ে বস্তুতে যে ধর্মের উদ্ভব হয় তাকে বস্তুর ভরবেগ বলে। ভরবেগ = ভর × বেগ।

নিউটনের গতির দ্বিতীয় সূত্র : ভরবেগের পরিবর্তনের হার বস্তুর ওপর প্রযুক্ত বলের সমানুপাতিক। এই বল যে দিকে ক্রিয়া করে ভরবেগের পরিবর্তনও সেদিকে ঘটে।

ঘাত বল : খুব অল্প সময়ের জন্য খুব বড় মানের যে বল কোনো বস্তুর ওপর প্রযুক্ত হয় তাকে ঘাত বল বলে।

ঘাত : কোনো বল ও বলের ক্রিয়াকালের গুণফলকে ওই বলের ঘাত বলে।

জড়তার ভ্রামক : কোনো অক্ষ সাপেক্ষে ঘূর্ণনরত কোনো বস্তুর প্রতিটি কণায় ভর ও অক্ষ হতে তাদের প্রত্যেকের লম্ব দূরত্বের বর্গের গুণফলকে জড়তার ভ্রামক বলে।

কৌণিক ভরবেগ : ঘূর্ণনরত কোনো বস্তুকণার ব্যাসার্ধ ভেক্টর ও রৈখিক ভরবেগের ভেক্টর গুণফলকে কৌণিক ভরবেগ বলে।

চক্রগতির ব্যাসার্ধ : যদি কোনো দৃঢ় বস্তুর একটি নির্দিষ্ট বিন্দু যেখানে বস্তুটির সমস্ত ভর কেন্দ্রীভূত আছে ধরা হয় এবং ঘূর্ণন অক্ষ সাপেক্ষে ওই বিন্দুতে জড়তার ভ্রামক সমগ্র বস্তুটির জড়তার ভ্রামকের সমান হয়, তবে অক্ষ হতে ওই বিন্দুর দূরত্বকে চক্রগতির ব্যাসার্ধ বলা হয়।

টর্ক : কোনো নির্দিষ্ট অক্ষের চারদিকে ঘূর্ণায়মান কোনো বস্তুতে ত্বরণ সৃষ্টির জন্য প্রযুক্ত দ্বন্দ্বের ভ্রামককে টর্ক বা বলের ভ্রামক বলে।

কৌণিক ভরবেগের নিত্যতা বা সংরক্ষণ সূত্র : বস্তুর উপর ক্রিয়ারত বহিস্থ টর্কের লব্ধি শূন্য হলে, ঘূর্ণায়মান বস্তুর কৌণিক ভরবেগের পরিবর্তন হবে না। এটিই কৌণিক ভরবেগের নিত্যতা বা সংরক্ষণ সূত্র।

কেন্দ্রমুখি বল : যে বলের ক্রিয়ায় কোনো বস্তু সমদ্রুতিতে বৃত্তপথে চলতে থাকে এবং যে বল সবসময় বস্তুর গতিপথের সঙ্গে লম্বভাবে ভেতরের দিকে অর্থাৎ বৃত্তের কেন্দ্রাভিমুখে ক্রিয়া করে তাকে কেন্দ্রমুখি বা অভিকেন্দ্র বল (Centripetal force) বলা হয়।

কেন্দ্রবিমুখি বল : সমদ্রুতিতে বৃত্তপথে আবর্তনরত বস্তুর ওপর অভিকেন্দ্র বলের সমান ও বিপরীতমুখি অর্থাৎ কেন্দ্র থেকে বাইরেরর দিকে একটি অলীক বল ক্রিয়া করে। একে কেন্দ্রবিমুখি বা অপকেন্দ্র বল বলে।

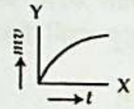
সংঘর্ষ : অতি অল্প সময়ের জন্য বৃহৎ কোনো বল ক্রিয়া করে বস্তুর গতির হঠাৎ ও ব্যাপক পরিবর্তন করাকে সংঘাত বা সংঘর্ষ বলে।

স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষ : সংঘর্ষের আগে ও পরে দুটি বস্তুর আপেক্ষিক বেগ অপরিবর্তিত থাকলে সংঘর্ষটিকে পূর্ণ স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষ বলে।

অস্থিতিস্থাপক সংঘর্ষ : যে সংঘর্ষের পর বস্তুটি পরস্পরের সঙ্গে যুক্ত হয়ে একটি বস্তুরূপে চলতে থাকে অর্থাৎ যে সংঘর্ষের পর বস্তু দুটির আপেক্ষিক বেগ শূন্য হয়, তাকে অস্থিতিস্থাপক সংঘর্ষ বলে।

একমাত্রিক সংঘর্ষ : সংঘাতাধীন বস্তু দুটির আপেক্ষিক গতিবেগ সংঘর্ষের আগে ও পরে একই সরলরেখা বরাবর হলে ওই সংঘর্ষকে একমাত্রিক সংঘর্ষ বলে।

বহুনির্বাচনি প্রশ্নের উত্তরের জন্য প্রয়োজনীয় বিষয়াবলির সার-সংক্ষেপ

১। একটি গাড়ি স্থির অবস্থা হতে ত্বরণশীল হলে সময়ের বিপরীতে ভরবেগের লেখচিত্র হবে 

২। হাতঘড়ির কাঁটার কৌণিক বেগ ঘণ্টার কাটার জন্য $\frac{\pi}{720}$ rad min^{-1} বা $\frac{\pi}{21600}$ rad s^{-1}, মিনিটের কাটার জন্য $\frac{\pi}{180}$ rad s^{-1}, সেকেন্ডের কাটার জন্য $\frac{\pi}{30}$ rad s^{-1}।

৩। কেন্দ্রমুখি বল দ্বারা কৃত কাজ শূন্য হবে। ব্যাঙ্কিং কোণ নির্ভর করে বস্তুর বেগের ওপর এবং রাস্তার বাঁকের ব্যাসার্ধের ওপর।

৪। 1 rps = 2 πrad, $\frac{mv^2}{r}$ হলো কেন্দ্রমুখি বলের রাশিমালা। সেকেন্ডের কাটার কৌণিক বেগ > মিনিটের কাটার কৌণিক বেগ > ঘণ্টার কাটার কৌণিক বেগ।

৫। কৌণিক ভরবেগের একক kgm^{2}s^{-1} এবং মাত্রা সমীকরণ MLT^{-1}। $F = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r$, $L = mvr = mr^2\omega$.

৬। টর্কের অপর নাম ঘূর্ণন বল। কৌণিক ভরবেগের মাত্রা সমীকরণ ML^{2}T^{-1}। টর্কের একক N-m বা জুল।

৭। পাতলা বৃত্তাকার চাকতির চক্রগতির ব্যাসার্ধ হলো $K = \frac{r}{\sqrt{2}}$। কোনো বস্তুর জড়তার ভ্রামক কৌণিক বেগের ওপর নির্ভর করে। সরু সুষম দণ্ডের প্রান্ত এবং লম্বভাবে দণ্ডের মধ্য বিন্দু দিয়ে ঘূর্ণনের ক্ষেত্রে জড়তার ভ্রামক 4 গুণ হয়।

৮। কোনো বস্তুর জড়তার ভ্রামক নির্ভর করে ভর ও ঘূর্ণন অক্ষের অবস্থানের ওপর। টর্কের একক N-m মাত্রা [ML^{2}T^{-2}]

৯। সমান ভরের দুটি বস্তুর মধ্যে স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষ হলে এবং ১ম বস্তুর আদিবেগ u_1, শেষ বেগ v_1 এবং ২য় বস্তুর আদিবেগ u_2 এবং শেষবেগ v_2 হলে $u_1 = v_2$ প্রযোজ্য। সব থেকে দুর্বল বল মহাকর্ষ বল। সবল নিউক্লিয় বল শক্তিশালী বল।

১০। একক ভরের বস্তুর ওপর একক ত্বরণ সৃষ্টি করলে একক বলের সৃষ্টি হয়। কৌণিক ভরবেগের একক kg m^{2}s^{-1}.

১১। সমকৌণিক বেগে ঘূর্ণনরত কোনো বস্তুর ঘূর্ণন ব্যাসার্ধ দ্বিগুণ হলে টর্ক 4 গুণ হবে। কৌণিক ভরবেগের মাত্রা = [ML^{2}T^{-1}]

১২। রৈখিক বেগ ও কৌণিক বেগের মধ্যবর্তী কোণ 90°। একটি পাখা প্রতি মিনিটে 60 বার ঘুরলে পাখাটির কৌণিক বেগ হবে 2π rad/s. ঘড়ির মিনিটের কাটার কম্পাঙ্ক 2.78×10^{-4} Hz.

১৩। নৌকায় গুন টানার সময় নৌকার হাল দ্বারা প্রযুক্ত বলের উল্লম্ব উপাংশ প্রশমিত হয়।

১৪। ব্যাঙ্কিং হলো রাস্তার বাঁকে কেন্দ্রমুখি বল যোগানের জন্য ঢাল। ক্রিয়া ও প্রতিক্রিয়ার মধ্যবর্তী কোণ 180°।

১৫। 'r' ব্যাসার্ধের বৃত্তাকার পথে একবার ঘুরে আসলে সরণ হবে $2\pi r$। কৌণিক ত্বরণের মাত্রা [T^{-2}].

১৬। বলের ঘাত ভরবেগের পরিবর্তনের সমান। আর ঘাতবল হলো খুব অল্প সময়ের জন্য খুব বড় মানের প্রযুক্ত বল।

১৭। বলের ভ্রামক বা টর্ক (i) $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ (ii) $\vec{\tau} = I\vec{\alpha}$ (iii) $\tau = \frac{d\vec{L}}{dt}$ (iv) $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P}$ (v) $E = \frac{1}{2} I\omega^2$ ($E \propto I$ যখন ω ধ্রুব) কেন্দ্রমুখি বলের ভেক্টররূপ : $-m(\vec{\omega} \cdot \vec{\omega})r$। ক্রিয়া ও প্রতিক্রিয়ার মধ্যবর্তী কোণ 180°।

১৮। ক্রিয়া ও প্রতিক্রিয়া বল (i) দুটি ভিন্ন বস্তুর উপর ক্রিয়া করে (ii) এদের যোগফল শূন্য হয়।

১৯। আবর্তন ঘূর্ণন গতির জন্য (i) কাজ = টর্ক × কৌণিক বেগ, (ii) ক্ষমতা = টর্ক × কৌণিক বেগ

২০। দৃঢ় বস্তুর জড়তার ভ্রামক নির্ভর করে (i) ঘূর্ণন অক্ষের অবস্থানের ওপর (ii) দৃঢ় বস্তুর আকৃতির ওপর (iii) ঘূর্ণন অক্ষের চারদিকে দৃঢ় বস্তুর ভরের ওপর। বল × ক্রিয়াকাল = ঘাত বল।

২১। ১ম বস্তুর ভর ২য় বস্তুর ভরের তুলনায় অনেক বেশি হলে সংঘর্ষের পর ১ম বস্তুটি একই বেগে চলতে থাকবে।

২২। ঘড়ির ঘণ্টার কাঁটার কৌণিক বেগ = $\frac{\pi}{21600}$ rad s^{-1}। জড়তার ভ্রামক ও ঘূর্ণন গতিশক্তির মধ্যে সম্পর্ক হলো $E = \frac{1}{2} I\omega^2$। সমকৌণিক বেগ ঘূর্ণায়মান বস্তুর গতিশক্তি জড়তার ভ্রামকের অনুপাত কৌণিক বেগের বর্গের সমানুপাতিক। একক কৌণিক বেগে ঘূর্ণনরত বস্তুর গতি জড়তার ভ্রামক গতিশক্তির দ্বিগুণ।

২৩। ভরবেগ 100% বৃদ্ধি করলে গতিশক্তির পরিবর্তন হবে 300%।

২৪। একক সমকৌণিক বেগে আবর্তনরত কোনো দৃঢ়বস্তুর জড়তার ভ্রামক সংখ্যাগতভাবে এর গতিশক্তির দ্বিগুণ।

২৫। কোনো দৃঢ় বস্তুর চক্রগতির ব্যাসার্ধ, $K = \sqrt{\frac{I}{M}}$। কোনো কণার ওপর প্রযুক্ত টর্ক শূন্য হলে কৌণিক ভরবেগ ধ্রুবক হয়। ডাইভিং এ লাফ দেওয়ার সময় সাতারুর কৌণিক ভরবেগ ধ্রুব থাকে। সবচেয়ে শক্তিশালী বল সবল নিউক্লিয় বল।

২৬। কোনো বিন্দুর সাপেক্ষে ভরবেগের ভ্রামককে কৌণিক ভরবেগ বলে। কেন্দ্রমুখি বলের ভেক্টররূপ $\frac{m(\vec{v} \times \vec{v})}{r}$.

২৭। বৃত্তাকার পথে ঘূর্ণনরত বস্তুর রৈখিক দ্রুতি v এবং আবর্তনকাল T এর মধ্যকার সম্পর্ক হলো, $v = \frac{2\pi r}{T}$

২৮। স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষের ক্ষেত্রে সংরক্ষিত থাকে গতিশক্তি এবং ভরবেগ। অস্থিতিস্থাপক সংঘর্ষের ক্ষেত্রে মোট গতিশক্তি সংরক্ষিত হয় না। বৃত্তাকার পথে কেন্দ্রের সাপেক্ষে গতিশীল হলে $\vec{r}$ ও $\vec{P}$ এর মধ্যবর্তী কোণ 90° হয়। ব্যাঙ্কিং কোণ নির্ভর করে বস্তুর বেগের ওপর এবং রাস্তার বাঁকের ব্যাসার্ধের ওপর।

২৯। দুটি বস্তুর সংঘর্ষে ক্রিয়া ও প্রতিক্রিয়া বল—(১) সমান ও বিপরীত (২) সর্বদা একই বস্তুর ওপর ক্রিয়া করে।

৩০। বলের ঘাতের একক নিউটন-সেকেন্ড, ভরবেগ ও গতিশক্তির সম্পর্ক হলো $E_k = \frac{P^2}{2m}$

৩১। সবল নিউক্লিয় বল আকর্ষণধর্মী, স্বল্প পাল্লার এবং চার্জ নিরপেক্ষ। মহাকর্ষ বল মাধ্যমের প্রকৃতির ওপর নির্ভর করে না। মহাকর্ষ বলের তীব্রতা 1। সবল নিউক্লিয় বলের তীব্রতা 10^{42}। সবচেয়ে দুর্বল বল মহাকর্ষ বল।

৩২। গতিশক্তি ও জড়তার ভ্রামকের সম্পর্ক, $E_k = \frac{1}{2} I\omega^2$। M ভরের এবং R ব্যাসার্ধের একটি চাকতি তার সাথে লম্ব বরাবর অক্ষের সাপেক্ষে জড়তার ভ্রামক $\frac{MR^2}{2}$। কোনো বস্তুর জড়তার ভ্রামক নির্ভর করে ভর ও ঘূর্ণন অক্ষের ওপর। ডাল ভাঙ্গানোর যাতাকলে কিনারার কণার রৈখিক বেগ বেশি এবং প্রতিটি কণার কৌণিক ভরবেগ সমান।

৩৩। আণবিক গঠনের জন্য দায়ী তড়িৎ চৌম্বক বল। বৃত্তাকার গতির ক্ষেত্রে কৌণিক ভরবেগ $mr^2\omega$.

অনুশীলনী

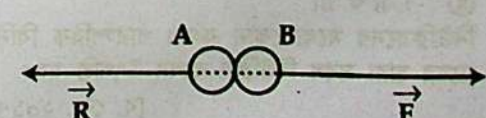
(ক) বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

১। সবচেয়ে শক্তিশালী বল হচ্ছে—
[সি. বো. ২০১৯]
ক মহাকর্ষ বল
খ তড়িৎ চুম্বকীয় বল
গ সবল নিউক্লীয় বল
ঘ দুর্বল নিউক্লীয় বল

২। নিচের বলগুলোর মধ্যে কোনটি সবচেয়ে দুর্বল ?
[কু. বো. ২০১৬; সি. বো. ২০১৬; য. বো. ২০১৫; Medical Admission Test, 2016-17]
ক মহাকর্ষ বল
খ তড়িৎ চুম্বকীয় বল
গ সবল নিউক্লীয় বল
ঘ দুর্বল নিউক্লীয় বল

৩। বলের মাত্রা সমীকরণ কোনটি ?
ক $[MLT^{-2}]$
খ $[MLT^{-1}]$
গ $[ML^2T^{-1}]$
ঘ $[ML^2T^{-2}]$

৪।



চিত্রটি নিউটনের কোন সূত্র প্রকাশ করে ?
ক ১ম সূত্র
খ ২য় সূত্র
গ ৩য় সূত্র
ঘ ২য় ও ৩য় সূত্র

৫। একটি ঘড়ির সেকেন্ডের কাঁটার কৌণিক কম্পাঙ্ক কত হবে ?
[BUET Admission Test, 2013-14]
ক 1·0 rev/s
খ 0·017 rev/s
গ 0·5 rev/s
ঘ 60·0 rev/s